

Sistematização da Aritmética Comercial europeia no século XIII

Systematization of european Commercial Arithmetic
in the 13th century

Sistematización de la Aritmética Comercial
europea en el siglo XIII

José dos Santos Guimarães Filho⁰¹ João Cláudio Brandemberg⁰²

Resumo

A Europa no século XIII passa por mudanças em suas atividades comerciais, essas mudanças levam a necessidade de cálculos mais otimizados e eficientes. Neste momento entra em cena um livro chamado *Liber Abaci* escrito por Leonardo Fibonacci (1180 – 1250) que supriu muitas dessas necessidades, assim, objetivamos apresentar o contexto encontrado por Leonardo Fibonacci no século XIII e apresentar exemplos de sistematizações trazidas por ele para a Aritmética Comercial em seu *Liber Abaci*. Dessa forma, realizamos uma pesquisa bibliográfica de fontes relacionadas à história da Idade Média, à história da matemática medieval, à aritmética medieval e à aritmética mercantil. Adicionalmente, exploramos os conteúdos presentes nos capítulos VIII, IX, X e XI do *Liber Abaci*. Foi possível identificar que o contexto que Leonardo Fibonacci encontrou no início do século XIII foi favorável a suas contribuições e suas sistematizações propostas atenderam as necessidades e demandas do comércio.

Palavras-chave: Europa no século XIII. Leonardo Fibonacci. *Liber Abaci*. Aritmética Comercial.

Abstract

Europe in the 13th century went through changes in its commercial activities, these changes led to the need for more optimized and efficient calculations. At this moment, a book called *Liber Abaci* written by Leonardo Fibonacci (1180 – 1250) came into play and met many of these needs. Thus, we aim to present the context found by Leonardo Fibonacci in the 13th century and present examples of systematizations brought by him to Commercial Arithmetic. in his *Liber Abaci*. In this way, we carried out a bibliographical research of sources related to the history of the Middle Ages, the history of medieval mathematics, medieval arithmetic and mercantile arithmetic. Additionally, we explored the contents present in chapters VIII, IX, X and XI of *Liber Abaci*. It was possible to identify that the context that Leonardo Fibonacci found at the beginning of the 13th century was favorable to his contributions and his proposed systematizations met the needs and demands of commerce.

Keywords: Europe in the 13th century. Leonardo Fibonacci. *Liber Abaci*. Commercial Arithmetic.

Resumen

Europa en el siglo XIII pasó por cambios en sus actividades comerciales, estos cambios llevaron a la necesidad de cálculos más optimizados y eficientes. En este momento entró en juego un libro llamado *Liber Abaci* escrito por Leonardo Fibonacci (1180 – 1250) que satisfizo muchas de estas necesidades, por lo que pretendemos presentar el contexto encontrado por Leonardo Fibonacci en el siglo XIII y presentar ejemplos de sistematizaciones llevadas a cabo. por él a la Aritmética Comercial en su *Liber Abaci*. De esta forma, realizamos una investigación bibliográfica de fuentes relacionadas con la historia de la Edad Media, la historia de las matemáticas medievales, la aritmética medieval y la aritmética mercantil. Además, exploramos los contenidos presentes en los capítulos VIII, IX, X y XI del *Liber Abaci*. Se pudo identificar que el contexto que encontró Leonardo Fibonacci a principios del siglo XIII fue favorable a sus aportes y sus sistematizaciones propuestas atendieron las necesidades y demandas del comercio.

Palabras Clave: Europa en el siglo XIII. Leonardo Fibonacci. *Liber Abaci*. Aritmética Comercial.

1 Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM/UFGA). Professor temporário do Curso de Licenciatura de Matemática na Universidade do Estado do Pará (UEPA). E-mail: js_guima@hotmail.com

2 Doutor em Educação (UFRN). Professor titular do Instituto de Ciências Exatas e Naturais (UFGA). Docente Permanente do Programa de pós-graduação em Ciências e Matemáticas (PPGECM/UFGA). E-mail: brand@ufpa.br

1. INTRODUÇÃO

Observamos nas literaturas especializadas, que Leonardo Fibonacci (1180 – 1250) leva o título de um dos maiores matemáticos italianos do século XIII (EVES, 2011). Ao olhar para ele em seu contexto, percebemos que não foi o único a viajar e catalogar conhecimentos pelo oriente, mas, outros como Adelard de Bath (1180 – 1252) também conhecia matemáticas não divulgadas na Europa (SAITO, 2015). No entanto, Leonardo Fibonacci, após suas viagens pelo oriente, reuniu os conhecimentos adquiridos em um livro intitulado de *Liber Abaci* (Livro do Cálculo).

Este livro possibilita ao comerciante outros métodos aritméticos para suas transações, dando novos horizontes à aritmética do século XIII. Assim, questionamos: qual o contexto em que Leonardo Fibonacci estava inserido e quais foram as sistematizações trazidas por matemático em seu *Liber Abaci* para a Aritmética Comercial da Europa do século XIII?

Com esses questionamentos direcionando nossa pesquisa, objetivamos apresentar o contexto encontrado por Leonardo Fibonacci no século XIII e exemplos de sistematizações trazidas por ele para a Aritmética Comercial em seu *Liber Abaci*. Para tanto, fizemos uma revisão bibliográfica de materiais concernentes à história da idade média, história da matemática medieval, aritmética medieval e aritmética mercantil. Encontramos autores como: Brito (2007), Castillo (2007), Eves (2011), Garbi (2009), Leonardo Pisano (1857), Potro (2012) e Schramm (2001). Além disso, investigamos também o conjunto de saberes contidos nos capítulos VIII, IX, X e XI do *Liber Abaci* da edição de 1857, e a partir de um estudo deste documento, apontamos algumas sistematizações trazidas para a Aritmética Comercial da Europa do século XIII.

Organizamos desta forma o artigo em duas seções, a primeira consiste em levar o leitor ao ambiente medieval apresentando aspectos do contexto da Idade Média priorizando aqueles que seus desdobramentos contribuíram para o início do século XIII. Em seguida apresentamos algumas sistematizações apresentadas no *Liber Abaci*, deixando claro que nos concentramos nos capítulos VIII, IX, X e XI, os quais tratam de uma Aritmética Comercial. Desta forma, apresentamos a seguir o contexto encontrado por este matemático italiano na primeira metade do século XIII.

2. UMA AMBIENTAÇÃO MEDIEVAL AO SÉCULO XIII

Antes de explorar o contexto em que Leonardo Fibonacci (Figura 1) se encontrava, temos que entender quem era este personagem. Temos na literatura informações rasas sobre ele, o que há de mais confiável, é dito por ele mesmo na introdução de seu *Liber Abaci*. Mesmo com informações limitadas, conseguimos extrair elementos suficientes para formar uma compreensão básica desse personagem.

Leonardo Fibonacci foi um italiano nascido em Pisa em 1180, esta cidade era um centro comercial importante, no qual seu pai, Guglielmo Bonacci, era um secretário da República de Pisa ligado aos negócios mercantis (Castillo, 2007; Eves, 2011; Oliveira, 2013).

Figura 1 – Leonardo Fibonacci

Fonte: <http://berg.com.ua/profile/fibonacci/>

Seu pai foi um mercador italiano com interesse no norte da África, iniciou os seus negócios com assuntos de contabilidade mercantil, o que inferimos despertar o interesse de Leonardo Fibonacci pelos cálculos Aritméticos e Algébricos, que foram além das aplicações práticas, ou seja, foram para além das práticas comerciais de compra e venda de mercadorias, embora tenha sido uma de suas maiores influências.

Nesta nova paisagem, Leonardo Fibonacci tem parte de seus estudos, especificamente em Bejaia, onde seu pai desenvolveu parte de suas funções alfandegárias. Ainda jovem, teve contato com comerciantes de diversas culturas da região mediterrânea, na qual aprendeu técnicas matemáticas não divulgadas na Europa (Eves, 2011; Oliveira, 2013).

Leonardo Fibonacci, a pedido de seu pai, estudou o ábaco na escola do ábaco, além de ter estudado sob a supervisão de um professor árabe (cujo nome não é citado) e percorreu Egito, Síria, Grécia e Sicília. Isso o levou a entrar em contato direto com procedimentos matemáticos orientais, dos quais, passou a ser um sério defensor, em particular, dos números indo-arábicos após conhecê-los nessas viagens, o motivando a dedicar-se ao estudo desses novos algarismos e a essa nova forma de calcular, creditando a ele um lugar como matemático italiano no século XIII, encerrando sua carreira no ano de 1250 (seu falecimento) (Castillo, 2007; Oliveira, 2013; Devlin, 2012).

A motivação pelo estudo dos números indo-arábicos levou Leonardo Fibonacci a escrever um livro chamado de *Liber Abaci* (que será comentado na próxima seção) em 1202, após retornar de suas viagens a sua cidade natal. Essa obra, em conformidade com Garbi (2009), torna Leonardo Fibonacci o primeiro cristão a discorrer sobre álgebra. E segundo Boyer (1974), este livro traz uma característica na maneira de pensar medieval tanto islâmica quanto cristã.

Para entender a Europa encontrada por esse matemático italiano após suas viagens, trazemos, ao foco, aspectos que permeiam a Idade Média. Para tanto, selecionamos alguns fatos que julgamos importantes e que perpassam estes séculos, que compõe esse período histórico, para nossas discussões e para uma ambientação medieval, na qual Leonardo Fibonacci se encontrou.

Ao nos remeter aos fatos, ou melhor, aos acontecimentos dos fatos da Idade Média, priorizamos para este artigo alguns em que seus desdobramentos influenciaram no contexto encontrado por Leonardo Fibonacci. Um desses desdobramentos foi no declínio do Império Romano, a qual não causou apenas divisões territoriais e políticas, mas nas ciências e nas artes e nos idiomas falados e escritos, o que levou ao distanciamento europeu das obras anteriores ao século III.

Neste distanciamento, o ambiente medieval acaba por nomear o clero como administrador dos conhecimentos, cabendo a ele mediar a produção, divulgação e manutenção dos saberes profícuos na Europa. Esse poder dado à igreja se desdobra na poda dos saberes em trânsito, favorecendo o conhecimento de Deus e do aprofundamento da Teologia, assim, muito das obras greco-romanas, serviram mais para subsidiar os dogmas cristãos. A partir de Brito (2007), temos uma pequena amostra disso: os escritos de Boécio (480 – 524); compêndios de Teologia; manuais que tentavam reunir as artes liberais; textos de Cassiodoro (480 – 575); livros de números; etimologia de Isidoro de Sevilha (550 – 636).

Outro fator que julgamos importante, reside na heterogenia europeia, pois esse protagonismo no saber do clero não era partilhado em toda Europa, temos divergências territoriais e nas lideranças de cada reinado. O que estamos inferindo, é que o território europeu não partilhava de uma só cultura, sociedade, economia e liderança, fazendo deste um território diversificado, o que proporcionou crescimentos e divulgação de conhecimentos orientais em partes da Europa, muito antes da aceitação em massa desses conhecimentos (Schramm, 2001).

Este fato permitiu a entrada de novos conhecimentos, a proximidade com outras línguas como o árabe, novos estilos artísticos, novas técnicas para o comércio, para a agricultura, para a manufatura, o conhecimento da bússola, do papel e da pólvora, todos esses conhecimentos vindos de outras regiões do oriente (Vasconcelos, 1925).

Temos nos reinos da Sicília um destes ambientes heterogêneos, este reino torna-se um ponto de interesse para as potências estrangeiras, o qual teve sua colonização com os gregos, mas foi conquistado pelos romanos seguidos pelos godos, bizantinos e árabes. Os quais deixaram suas marcas e influências na cultura, na sociedade, na ciência e nas artes (Schramm, 2001).

Com uma Europa heterogênea, tem-se acesso a livros em árabe e em grego em suas versões originais, estes livros foram traduzidos para o Latim, tornando-a a língua da ciência, deixando para o reino da Sicília o legado de maiores eruditos da época. Observamos também que estes tradutores, diferentes do clero, não estavam subordinados aos interesses da igreja para suas traduções e estudos, o que permitiu um crescimento mais livre da ciência, construindo uma base para o que viria no século XIII (Schramm, 2001).

Temos nessas diversidades um aspecto que marca e abrange uma boa parte da vida medieval, em particular nas atividades comerciais, a qual influenciou muitas outras áreas como as ciências e as artes. Mesmo com grande fator de impacto, as atividades comerciais

tiveram muitas oscilações durante o período da Idade Média. Por este motivo, acordamos com Potro (2012), quando destaca que:

O precursor do século XI não é o mesmo comerciante do século XIII nem aquele que superou as dificuldades do século XIV e projeta seu domínio indiscutível sobre o século XV. O comércio mercantil passou por importantes transformações ao longo desses séculos que levaram à sua **profissionalização** e **aceitação social** (Potro, 2012, p. 202, tradução nossa, grifo nosso).

O fato de o comércio ter tido essas oscilações apontadas por Potro (2012), mostram que o comércio e o comerciante passaram por transformações que levaram a sua profissionalização, possibilitando sua expansão, o que acaba por influenciar na profissionalização dos ofícios urbanos, influenciando na organização urbana, na sociedade e na economia, que também sofreram modificações (Guimarães Filho e Brandemberg, 2022).

Entendemos que essas mudanças passaram por alguns conflitos de ideias, de valores e de costumes, pois, sempre temos na história humana divergências e partidarismos quando há algo novo e desconhecido, o que geralmente causa incômodos por pressionar a saída da zona de conforto onde os indivíduos se encontram. Assim, temos em Guimarães Filho e Brandemberg (2022, p. 187) que:

[...] essas transformações tiveram em larga escala a aceitação social ao ponto de dar novas perspectivas ao clero, que em um dado momento eram contra a taxaçoão acima do valor real do produto, posteriormente tomam a posição de que era justo cobrar uma quantia a mais em prol do trabalho e empenho empreendido pelos comerciantes ou pelos artífices que fabricavam os produtos (Guimarães Filho e Brandemberg, 2022, p. 187).

O que converge com Huberman (1981), quando apresenta a concepção do clero a partir de um pensamento bíblico sobre emprestar dinheiro a juros, assim, este autor apresenta que toda intenção de lucro em alguma transação se configurava como o pecado da usura.

Esse pensamento era partilhado pela sociedade e bem aceito, pois antes da expansão do comércio havia apenas pequenos comerciantes e sem alguns ofícios urbanos como os banqueiros, sem a necessidade de grandes movimentações. Neste contexto, “a possibilidade de investir dinheiro com lucro praticamente não existia, se alguém desejava um empréstimo, certamente não tinha por objetivo o enriquecimento, mas precisava dele para viver” (Huberman, 1981, p. 46).

Assim, temos nestes aspectos historiográficos um entrelaçamento de fatos na história da Europa neste período, que à medida que foram surgindo contribuíram para a construção e divulgação do *Liber Abaci*. Entre esses e muitos aspectos temos os apontados por Potro (2012), que apresenta o crescimento demográfico, o crescimento da produção agrícola e a estabilidade política como fatores diretos para o crescimento comercial, logo, um momento profícuo para o livro de Leonardo Fibonacci (Guimarães Filho e Brandemberg, 2022).

Leonardo Fibonacci ao se deparar com esse contexto europeu após suas viagens em 1202, “uniu o útil ao agradável”, ou seja, encontra o contexto adequado para apresentar a Europa todo o conhecimento matemático que reuniu durante os anos de estudo no oriente, contexto esse que não foi encontrado por Boécio (480 – 524) e Gebert D’Aurillac (950 – 1003). Com um contexto favorável, Leonardo Fibonacci ganha forças para apresentar contribuições para a Aritmética Comercial em seu *Liber Abaci*, como será comentado a seguir.

3. LIBER ABACI: ALGUMAS SISTEMATIZAÇÕES DA ARITMÉTICA COMERCIAL

O *Liber Abaci* foi escrito por Leonardo Fibonacci em 1202, ao chegar de suas viagens pelo oriente, como comentado anteriormente, após o conhecimento de suas habilidades pela corte do rei Frederico II (1194 – 1250).

Este livro teve uma reedição em 1228, pelo próprio autor, a partir de algumas considerações realizadas por Michael Scott (1175 – 1235) — que foi filósofo e um dos estudiosos da corte do rei Frederico II — citado nas primeiras linhas dessa reedição.

O *Liber Abaci*, um livro de cálculos, ou melhor, da sistematização de cálculos aritméticos, teve um papel importante na Europa, como o de ser um dos responsáveis pela divulgação das cifras indianas. Mas, para o século XIII foi aquele que proporcionou uma organização e sistematização das técnicas exigidas pelo comércio em suas diversas atividades, bem como pelos ofícios urbanos.

Para o estudo do *Liber Abaci*, utilizamos o texto da edição de 1857 do Códice Magliabechiano, composto por cerca de 6.000 manuscritos, sendo o acervo mais antigo da Biblioteca Nacional Central de Florença (BNCF), estruturado em 40 classes temáticas, nas quais se encontra o *Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano* (Figura 2) na classe cinco, edição esta a partir de Baldassarre Boncompagni (1821 – 1894) que foi um historiador da matemática e um aristocrata italiano.

Figura 2 – Capa do *Liber Abaci* da edição de 1857



Fonte: Acervo dos autores (2022).

Pelo histórico de Leonardo Fibonacci de familiarização com as atividades comerciais de seu pai, podemos sugerir que o livro, além de teórico e sistematizado, estava a serviço de uma aritmética prática, influenciado pelos árabes e pelos indianos, porém, ajustado a uma matemática comercial italiana, pois o autor deixa claro o desejo do povo italiano ser instruído acima de todos os outros (Leonardo Pisano, 1857).

O autor deixa claro que tentou reunir todos os conhecimentos tomados em suas viagens para ensinar este novo método aritmético e para facilitar a compreensão das teorias apresentadas, como ele mesmo julga, divide o livro em quinze capítulos, os quais são apresentados logo após o prólogo em uma espécie de índice (Leonardo Pisano, 1857).

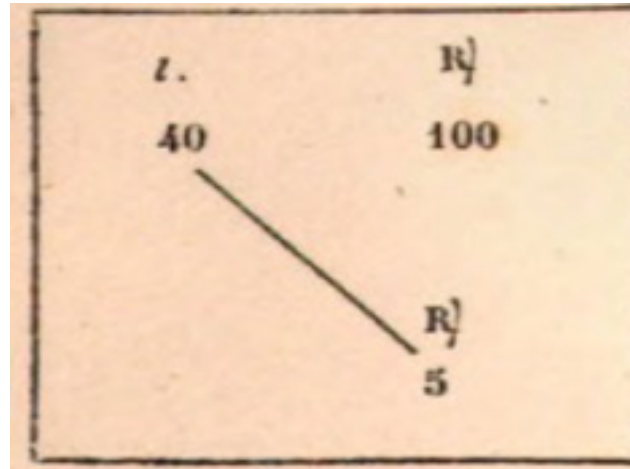
Estes quinze capítulos, os quais, inferimos ser organizados em três temáticas, os apresentamos da seguinte forma: do capítulo I ao capítulo VII, temos a parte do livro que trata da Aritmética Básica; do capítulo VIII ao capítulo XI temos a parte da Aritmética Comercial; para finalizar, do capítulo XII ao XV temos Problemas Diversos (Situações Problemas). Não pretendemos neste artigo apresentar todas essas temáticas, mas evidenciar alguns pontos da Aritmética Comercial, com o intuito de clarificar as sistematizações trazidas por este matemático italiano em seu livro. Para tanto, a partir daqui denominaremos Leonardo Fibonacci por Leonardo Pisano, seu nome de citação para o *Liber Abaci*.

Assim, partimos do capítulo VIII, que começa com uma introdução, a qual apresenta a regra geral para a técnica que será apresentada em relação a proporções nas vendas de mercadorias, nas palavras de Leonardo Pisano (1857, p. 83, tradução nossa), “o oitavo capítulo começa com a constatação do preço mais alto das mercadorias”, ou seja, é apresentada uma técnica para encontrar o maior preço que você pode vender uma mercadoria.

A partir da regra geral, que nos parece ser de proporção linear, Leonardo Pisano (1857) apresenta várias situações em que podem ser aplicadas à técnica admitidas por ele. É apresentada a seguinte situação como primeiro exemplo (Figura 3), onde é dado os rolos como informação, tendo como coeficiente de proporcionalidade .

O que cantar se for vendido por 40 libras; e que ele pergunte quanto valem os 5 rolos: porque três números conhecidos são colocados nesta posição, como dissemos anteriormente, que seria necessário para 100 rolos, e 40 libras, e 5 rolos, dos quais dois são do mesmo tipo, a saber, Rolo 100 e Rolo 5; quais 100 são a recompensa. [...]. E haverá dois números de um tipo, um sob o outro, como dissemos antes, ou seja, os rolos 5 sob os rolos 100: então, com os assim descritos, você multiplicará os números que estão do outro lado, ou seja, de 5 a 40, serão 200; e dividir por 100, ele sai 2 libras o preço desses 5 rolos, descritos em 40: porque esse número, que chega por divisão, é sempre do gênero desse número sozinho, que está nos três números mencionados. (Leonardo Pisano, 1857, p. 84 – 85, tradução nossa).

Figura 3 – Exemplo para encontrar o preço dos rolos



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 84).

O autor apresenta outros exemplos do mesmo tipo, com exemplos de divisões com o divisor diferente de 100 e com outras moedas como o *Massamutini*, uma moeda de ouro registrada em vários documentos dos séculos XII e XIII. Temos exemplos para pimentas, câmbios de moedas (libras, denários, centavos, soldis), queijos pisanos, joio, panos, etc. Leonardo Pisano (1857) apresenta aplicações dessa técnica em ambientes (lugares e povos) de negociações diversas, como Síria, Alexandria, Constantinopolis, Karatos, Mulçumanos, Bizâncio, terminando com mais exemplos com variados materiais como o vinho.

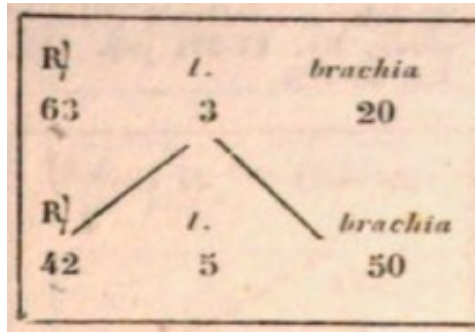
O nono capítulo inicia explicando que este será dividido em três partes. Aqui, Leonardo Pisano (1857) deixa claro o motivo, o de oferecer uma organização acessível para que o leitor tenha a possibilidade de acesso direto ao assunto que deseja encontrar, como uma espécie de catálogo, iniciando com a troca de mercadorias e coisas semelhantes.

Este capítulo utiliza a proporção como no capítulo anterior, acrescido de uma quantidade maior de grandezas em uma única conta. Desta forma, o autor apresenta uma regra geral:

Mas quando você quer comprar qualquer tipo de mercadoria com qualquer outra mercadoria, isto é, baratear, você deve aprender o preço de cada mercadoria; cujo preço deve ser sempre de uma moeda. E você está descrevendo uma dessas mercadorias no topo da mesa e está escrevendo o preço dessa mercadoria no canto esquerdo da mesa na mesma linha, como descrevemos no capítulo anterior sobre negociação. Então, sob o preço dessa recompensa, ele descreve em outra linha o preço da recompensa de outro; e volta descreve a mercadoria desse preço. E se os salários que você deseja negociar, como qualquer outra mercadoria, foram do preço mais alto, conforme descrito na primeira tabela, você colocará o valor desse salário que você tinha abaixo do mesmo preço. E se foi de outra mercadoria, descrever a quantidade dessa mercadoria acima dela, assim como, acabamos de dizer, o preço de um salário deve ser descrito sob o preço de outro, assim também salários semelhantes são descritos sob o mesmo preço. (Leonardo Pisano, 1857, p. 118, tradução nossa).

Para o exemplo proposto na citação, o autor apresenta uma composição gráfica (Figura 4), dando as seguintes informações: além de 20 braços de pano valer 3 libras, 5 libras valer 42 rolos de algodão, pergunta-se 50 braços de pano valem quantos rolos de algodão?

Figura 4 – Exemplo da primeira parte do capítulo IX



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 118).

Leonardo Pisano (1857), para este exemplo, comentou que utilizou ensinamentos do *Almagesto* de Ptolomeu (100 – 170) e o tratado de proporção e proporcionalidade de Ametus filius (839 – 912), matemáticos que influenciaram em suas construções e demonstrações. O autor continua com outros exemplos com a mesma técnica, mas com outros tipos de mercadorias e de moedas.

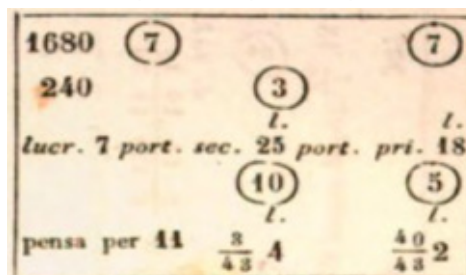
Já o décimo capítulo, traz instruções sobre como dividir o lucro de algum investimento proporcionalmente a cada investidor. Este capítulo é dividido em três partes, nas quais são ensinadas técnicas para dois, três e quatro investidores, mas inferimos que a técnica ensinada serve para n investidores e para esse artigo trataremos apenas para dois investidores.

Observamos também ser uma técnica utilizada em nossa matemática moderna para distribuições proporcionais, que Leonardo Pisano (1857) nomeia como Método da Empresa, o qual concordamos com Sigler (2002), em nos dá uma boa noção de como a contabilidade era conduzida no século XIII. Leonardo Pisano (1857) apresenta também uma regra geral para esta técnica e em seguida na primeira parte do capítulo traz o seguinte exemplo,

Propõe-se que dois homens que juntos façam uma empresa na qual o primeiro ponha na sociedade acima 18 libras de algum dinheiro, e o outro ponha na mesma empresa 25 libras, e então a empresa tenha um lucro de 7 libras, e pergunta-se quanto das 7 libras cada um vai conter (Leonardo Pisano, 1857, p. 135, tradução nossa).

Ao resolver a partir da regra geral, apresenta a seguinte resolução (Figura 5) no que ele chama de mesa ou tabuleiro.

Figura 5 – Exemplo do capítulo X para dois sócios



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 135).

Como dissemos, assemelha-se muito a matemática moderna, pois Leonardo Pisano (1857) propõe para o primeiro sócio dividir dezoito (quantidade investida) por quarenta e três (total do investimento), onde, o resultado será multiplicado por sete (lucro obtido):

$$(18 \div 43) \times 7 \cong 2,93$$

Este resultado é dado por uma configuração própria de um número apresentado no livro, diferente da configuração atual como descrito na figura 5, assim temos que

$$\frac{40}{43}2 \implies \frac{40}{43} + 2 \cong 2,93$$

Para o segundo investidor é proposto o mesmo, divide-se vinte e cinco (quantidade investida) por quarenta e três (total do investimento), onde, o resultado será multiplicado por sete (lucro obtido):

$$(25 \div 43) \times 7 \cong 4,07,$$

de igual forma o resultado é dado por uma configuração diferente de número, assim temos,

$$\frac{3}{43}4 \implies \frac{3}{43} + 4 \cong 4,07.$$

Vale ressaltar que na aplicação da técnica para quatro sócios, observamos que para ser otimizada, Leonardo Pisano (1857) recorre à regra do cancelamento aliada às regras de cada número, que para a nossa matemática moderna será o Mínimo Múltiplo Comum (MMC).

No capítulo XI, Leonardo Pisano (1857) ensina sobre a liga de dinheiro, de uma forma mais simples, ele ensina quanto deve ter de cada material, como cobre e prata em cada moeda, o qual explana três situações, a primeira é quando se mistura uma certa quantidade de prata com o cobre, a segunda é quando se adiciona uma certa quantia de prata ou de cobre a moeda e a terceira é quando você possui uma moeda, mas quer aumentar ou diminuir seu valor. O autor organiza o capítulo em sete diferenças visando ser melhor explorado as possíveis situações.

Desta forma, Leonardo Pisano (1857) termina o capítulo com exemplos variados, dentre os quais, encontramos: sobre um homem que vende duas moedas de ouro; sobre um homem que compra 7 libras de três carnes por 7 denários; sobre uma comerciante que compra maçãs e peras, que nos chama a atenção para o feminino, nos possibilitando inferir, que havia mulheres no comércio também, mas que os homens eram predominantes pela quantidade de exemplos dados com homens e mulheres; sobre compra de grãos; sobre um sino feito de cinco metais; sobre um homem que compra trinta pássaros de três espécies diferentes por 30 denários.

Com essa apresentação do capítulo VIII ao XI compreendidos na temática da Aritmética Comercial, percebemos que Leonardo Pisano (1857) toma um papel importante para as atividades comerciais, entregando a partir de sua obra, sistematizações que otimizaram não somente o comércio, mas os serviços urbanos.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o exposto, dos aspectos que levantamos, intuímos um conjunto de fatores, que contribuíram para que Leonardo Fibonacci pudesse, não somente, apresentasse suas sistematizações para a Aritmética Comercial da Europa no século XIII, mas ter sucesso na apresentação dos novos métodos. Isso porque, como vimos, este livro “caiu nas graças” da corte de Frederico II e contribuiu para o crescimento do comércio.

Esse conjunto de fatores apresentados, ao longo deste trabalho, que não se limitaram ao nascimento ou à genialidade de Leonardo Fibonacci, faz com que sejam desmistificadas muitas coisas, como o fato de que seu sucesso estava ligado apenas a esses dois fatores.

De fato, não foram esses fatores, isoladamente, que o fizeram ter tamanha aceitação pela sociedade do século XIII, mas o entrelaçamento de acontecimentos de fatos, e suas repercussões e influências, diretas ou indiretas, no decorrer da Idade Média.

Certamente, a Idade Média passou por algumas mudanças: o conhecimento passou a ser financiado pela corte, tivemos um aquecimento do comércio e o aparecimento de novos ofícios, fatores que levaram a necessidade da produção de cálculos mais elaborados e o uso de novos Métodos Aritméticos que foram além dos utilizados anteriormente. Suprindo a necessidade do comércio e dos ofícios urbanos por cálculos mais eficientes, otimizados, sistematizados e bem definidos no *Liber Abaci*, gerando confiabilidade nas transações que eram realizadas.

Leonardo Fibonacci encontrou o contexto adequado para que pudesse divulgar e popularizar suas propostas, trazendo dessa forma inovações para a Aritmética Comercial, logo, para o comércio e para os ofícios urbanos da Europa do século XIII.

Inovações essas possíveis de serem vistas, ainda que superficialmente, nas sistematizações apresentadas, nos capítulos VIII, IX, X e XI do *Liber Abaci*. Inicialmente, essas inovações são percebidas na organização do livro, construindo uma extensa base aritmética com os primeiros capítulos preparando o futuro aprendiz com os fundamentos básicos da aritmética.

Após essa fundamentação aritmética, o autor imerge na Aritmética Comercial, apresentando generalizações como uma forma geral de bolso para aplicação de determinado tipo de cálculo, que podia ser acessado rapidamente quando necessário, garantindo a otimização dos cálculos. Além dessas generalizações, este matemático apresenta inúmeras situações que poderiam ocorrer, que provavelmente tinham o intuito de cobrir o máximo de situações imagináveis nas transações comerciais.

Podemos assegurar que essas sistematizações da Aritméticas Comercial trouxeram para o comércio uma eficiência para os cálculos que estavam se tornando mais complexos e extensos. Potro (2007) assegura, que o próximo livro de Aritmética Comercial só iria surgir após cem anos do *Liber Abaci*. Isso não só garante a importância, como a eficiência e uso no comércio da Europa no século XIII, o que provavelmente, inferimos, houve disseminações para o século XIV.

5. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

6. REFERÊNCIAS

BRITO, A. J. Matemática na idade média: entre o místico e o científico. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Especial no 1, p. 127–141, 2007.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, SP: Edgard Blücher, 1974.

CASTILLO, R. M. **Fibonacci: El Primer Matemático Medieval**. 2ª ed. Coleção – La matemática em sus personajes. Espaha: Nivola, 2007.

DEVLIN, K. **The Man of Numbers: Fibonacci’s arithmetic revolution**. Volume 59, Number 5. Book Review. May, 2012

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5ª ed. – Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. 3ª ed ver. e ampl. São Paulo, SP: Ed. Livraria da Física, 2009.

GUIMARÃES FILHO, J. S.; BRANDEMBERG, J. C. *Liber Abaci*: contexto, competências, habilidades e potencialidades. Número Especial – V Seminário cearense de História da Matemática **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática** – Volume 9, Número 26, 181 – 197, 2022.

HUBERMAN, Leo. **História da riqueza do homem**. Nova York, NY: Zahar Editores, 1981.

LEONARDO PISANO. **Liber Abbaci**. Secundo la lezione del codice magliabrchiano, C. I, 2616, Badia Fiorentina, nº 73, Roma: 1857.

OLIVEIRA, J. J. **Sequências de Fibonacci: possibilidades de aplicações no ensino básico**. UFBA. Salvador, BA, 2013.

POTRO, B, C. El desarrollo del comercio medieval y su repercusión en las técnicas mercantiles: Ejemplos castellanos. **Pecunia**, n. 15 (julio-diciembre), 2012, p. 201- 220.

SCHRAMM, M. Frederick II of Hohenstaufen and Arabic Science. **Science in Context** 14(1/2), 2001, p. 289-312.

SIGLER, L. E. **Fibonacci’s Liber Abaci**: a translation into modern english of Leonardo Pisano’s book of calculation. New York: Ed. Springer, 2002.

VASCONCELOS, F. A. **História Das Matemáticas na Antiguidade**. Lisboa: Livrarias Aillaud e Bertrand, 1925.

Informações do artigo

Recebido: 12 de dezembro de 2023.

Aceito: 24 de abril de 2024.

Publicado: 17 de maio de 2024.

Como citar esse artigo (ABNT)

GUIMARÃES FILHO, José dos Santos; BRANDEMBERG, João Cláudio. Sistematização da Aritmética Comercial europeia no século XIII. **Revista Prática Docente**, Confresa/MT, v. 9, e24021, 2024. <https://doi.org/10.23926/RPD.2024.v9.e24021.id929>.

Como citar esse artigo (APA)

GUIMARÃES FILHO, J. S.; BRANDEMBERG, J. C. (2024). Padrões Matemáticos na Cerâmica Caeteuara: uma análise Etnomatemática. *Revista Prática Docente*, 9, e24021. <https://doi.org/10.23926/RPD.2024.v9.e24021.id929>.

Editor da Seção

Walber Christiano Lima da Costa  

Editor Chefe

Thiago Beirigo Lopes  