Revista Prática Docente (RPD)
ISSN: 2526-2149

[10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699](https://doi.org/10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699)

A REGRA DE TRÊS INVERSA EM LILAVATI (1150), DE BHĀSKARĀCĀRYA, COMO RECURSO PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES E O ENSINO DE MATEMÁTICA

THE INVERSE RULE OF THREE IN LILAVATI (1150) BY BHĀSKARĀCĀRYA AS A RESOURCE FOR TEACHER EDUCATION AND MATHEMATICS TEACHING

LA REGLA DE TRES INVERSA EN LILAVATI (1150) DE BHĀSKARĀCĀRYA COMO RECURSO PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Dianara Figueirêdo Freire
Mestranda em ensino de Ciências e Matemática (IFCE)
dianara.figueiredo07@aluno.ifce.edu.br

Ana Carolina Costa Pereira
Pós doutora em Educação Matemática (PUC-SP)
Professora adjunta da Universidade Estadual do Ceará (UECE).
Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM/IFCE) e do Programa de Pós-Graduação em Educação ((PPGE/UECE)
carolina.pereira@uece.br

Resumo
Pesquisas estão sendo desenvolvidas com vista a criar subsídios que auxiliem na formação de futuros professores de Matemática, para que estes tenham práticas que ajudem a incrementar suas aulas, tornando-as mais atrativas ao olhar dos alunos. Nesse contexto, surge a História da Matemática, que vem fornecendo recursos para serem aplicados aos licenciandos, promovendo uma interface entre história e ensino de Matemática. Dessa maneira, este artigo tem por objetivo discutir a regra de três simples e inversa exposta em Līlavātī, de Bhāskarācārya, com considerações didáticas desses conceitos, relacionando-os com a BNCC dos anos finais do ensino fundamental. Para isso, utilizamos como percurso metodológico os preceitos da pesquisa qualitativa, de caráter documental. Assim, concluímos que, desse trecho histórico, podem emergir possibilidades didáticas que dialogam com a Base Nacional Comum Curricular, colaborando para o desenvolvimento de competências e habilidades que regem o ensino atualmente.
Palavras-chave: Līlavātī. Regra de três. Bhāskarācārya. História da matemática. Formação de professores.

Recebido em: 5 de outubro de 2022.
Aprovado em: 17 de março de 2023.

Como citar esse artigo (ABNT):

FREIRE, Dianara Figueirêdo; PEREIRA, Ana Carolina Costa. A regra de três inversa em Lilavati (1150), de Bhāskarācārya, como recurso para a Formação de Professores e o ensino de Matemática. **Revista Prática Docente**, v. 8, n. 1, e23025, 2023. http://doi.org/10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

Abstract
Research is being developed with a view to creating subsidies that help in the training of future mathematics teachers, so that they have practices that help to improve their classes, making them more attractive to the students. In this context, the History of Mathematics emerges, which has been providing resources to be applied to undergraduates, promoting an interface between history and teaching Mathematics. Thus, this article aims to discuss the simple and inverse rule of three expounded in Līlavātī, by Bhāskarācārya, with didactic considerations of these concepts, relating them to the BNCC of the final years of elementary school. For this, we used as a methodological approach the precepts of qualitative research, of a documentary nature. Thus, we conclude that, from this historical stretch, didactic possibilities can emerge that dialogue with the National Common Curricular Base, collaborating for the development of skills and abilities that govern education today.
Keywords: Līlavātī. Rule of three. Bhāskaracārya. History of Mathematics. Teacher training.

Resumen
Se están desarrollando investigaciones con miras a crear subsidios que ayuden en la formación de los futuros profesores de matemáticas, para que tengan prácticas que ayuden a mejorar sus clases, haciéndolas más atractivas para los estudiantes. En ese contexto, surge la Historia de las Matemáticas, que viene proporcionando recursos para ser aplicados a los estudiantes de pregrado, promoviendo una interfaz entre la historia y la enseñanza de las Matemáticas. Así, este artículo tiene como objetivo discutir la regla de tres simple e inversa expuesta en Līlavātī, de Bhāskarācārya, con consideraciones didácticas de estos conceptos, relacionándolos con el BNCC de los últimos años de la escuela primaria. Para ello, utilizamos como enfoque metodológico los preceptos de la investigación cualitativa, de carácter documental. Así, concluimos que, de este tramo histórico, pueden emerger posibilidades didácticas que dialogan con la Base Curricular Común Nacional, colaborando para el desarrollo de competencias y habilidades que hoy rigen la educación.
Palabras Clave: Līlavātī. Regla de tres. Bhaskaracarya. Historia de las Matemáticas. Formación de profesores.

10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

1 Introdução

O ensino de Matemática vem requerendo meios de incrementar as aulas do ensino básico, para que obtenhamos um melhor ensino-aprendizagem dessa disciplina. Assim, como o docente é o principal agente nas salas de aulas, notamos que é preciso fazer uma formação do futuro professor de Matemática cada vez mais sólida, para o mesmo ter diversos artifícios que o auxiliem no momento de planejar e executar suas práticas.

Dessa maneira, uma área de estudo que vem se destacando, na formação de professores da Licenciatura em Matemática, é a história da Matemática, que vem fornecendo diversos recursos que permitem um repensar da Matemática na sua construção, fazendo com que futuros docentes repensem com significado os conceitos que serão apresentados por eles na sua futura profissão.

Sobre a história no ensino de Matemática, Mendes (2015) alega que podemos utilizar diversos tipos de abordagens para os tópicos matemáticos, para que os estudantes possam desenvolver um processo cognitivo que ofereça uma construção mais híbrida, ampliada e plural da Matemática produzida historicamente. Logo, "isso significa dar impulso à concretização de um ensino de Matemática que valorize os saberes matemáticos locais, globais, bem como a interação entre eles" (MENDES, 2015, p. 73).

Nessa conjuntura, é importante frisar o que é mencionado por Sousa, Pereira e Silva (2019, p. 485) ao afirmarem que, apesar de "o uso desses documentos originais em sala de aula ter crescido nos últimos anos, ainda são poucas as publicações envolvendo um material brasileiro". Nesse contexto, está sendo construída uma interface entre história e ensino de Matemática (SAITO; DIAS, 2013) por meio de documentos históricos, buscando-se discutir ações e produções que promovam um diálogo entre a Matemática do presente e a Matemática do passado, entendendo o percurso da construção dessa ciência.

Portanto, é possível contextualizar por meio da história conteúdos desenvolvidos na Educação Básica. Um desses, que merece a atenção é a regra de três, que muitos alunos somente compreendem o seu cálculo de maneira mecânica, não percebendo o seu real significado, sua utilidade. Desse modo, alunos e professores serão capazes de notar que a regra de três "se mostra como ferramenta útil no enfrentamento de situações específicas em seus ofícios, tais como: conversões de medidas, cálculos estequiométricos, porcentagem, juros simples e outros campos de práticas científicas" (SILVA, 2017, p. 13).

10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

Entre os documentos que apresentam práticas envolvendo a regra de três, encontramos o tratado *Līlavātī*, escrito por Bhāskarācārya ou Bhaskara II, em 1150, que apresenta diversos problemas e regras matemáticas permeando conceitos ensinados atualmente na Educação Básica, englobando, também, unidades temáticas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), tais como Aritmética, Geometria e Álgebra.

À vista disso, trataremos, no decorrer do texto, da décima quarta parte da Aritmética, que versa sobre a regra de três direta e inversa.[1] Com isso, o artigo tem por objetivo discutir a regra de três simples e inversa exposta em *Līlavātī*, de Bhāskarācārya, com considerações didáticas desses conceitos, relacionando-os com a BNCC dos anos finais do ensino fundamental.

Dessa forma, utilizamos como processos metodológicos as características de uma pesquisa qualitativa, pois "tal pesquisa é descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem" (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 70). Portanto dividimos está pesquisa em duas etapas.

Na primeira etapa, desenvolvemos uma investigação documental, que consistiu na tradução e exploração do tratado Lilavati, mais especificamente da parte da regra de três simples e inversa, com base na tradução para a língua inglesa realizada por John Taylor, publicada em 1816, intitulada: *Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry*, visto que o *Līlavātī* original não foi encontrado até o presente momento. Assim, nessa parte, compreendemos a regra, aplicamos nos problemas e verificamos os conceitos matemáticos presentes.

Na segunda etapa, fizemos uma pesquisa bibliográfica, na qual primeiramente buscamos trabalhos que discutem a temática do artigo, envolvendo textos relacionados: ao uso de recursos providos da história da matemática na educação básica; ao Lilavati; a matemática indiana; e a importância do aprendizado da regra de três. Por fim, fizemos a relação dos conceitos expostos por Bhāskarācārya com a BNCC quanto às suas competências e habilidades.

Posto isso, este artigo se divide em 5 seções. A primeira parte vem com aspectos iniciais da pesquisa; a segunda traz considerações sobre Bhāskarācārya, *Līlavātī* e a tradução de John Taylor (1816), evidenciando características importantes da história e conteúdos que estão envolvidos nesse tratado. Na terceira seção, mostram-se os aspectos matemáticos da regra de três inversa em *Līlavātī*, contendo a análise da regra e os problemas dessa parte; em sequência, são apresentadas as considerações didáticas que emergiram após o contato com essa obra,

[1] Considerações sobre a regra de três direta pode ser encontrada em Freire e Pereira (2022).

10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

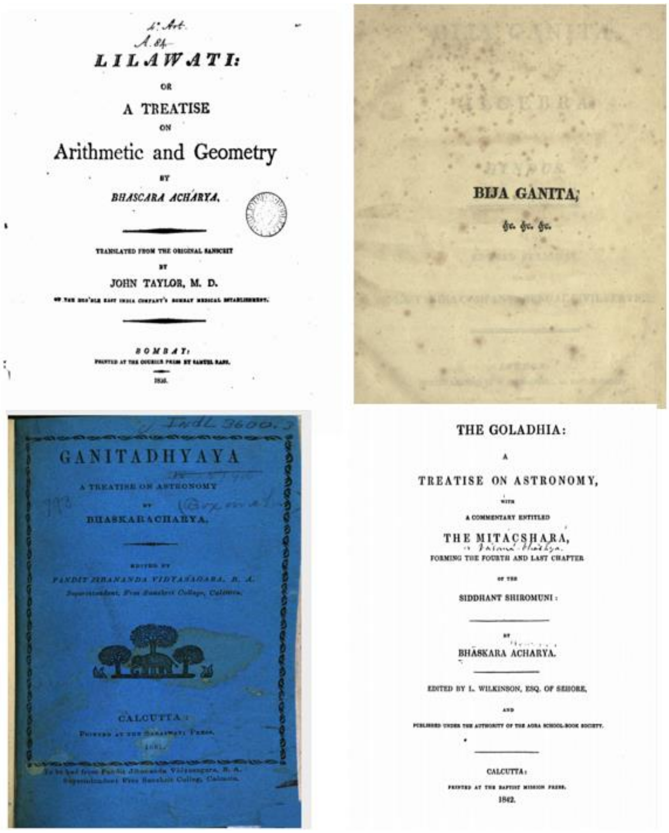
relacionando-as com as competências e habilidades da BNCC. Por fim, expomos as considerações finais deste trabalho.

2 BHĀSKARĀCĀRYA (?1114 - ?1185), *LĪLAVĀTĪ* E A TRADUÇÃO DE JOHN TAYLOR (1816)

Bhāskarācārya, também conhecido como Bhaskara II, foi um estudioso da Matemática hindu, astrônomo e astrólogo, que nasceu aproximadamente no ano de 1114, no século XII. Sobre os textos de Bhāskarācārya, Roque (2012, p. 239) pontua que ele foi "autor dos livros mais populares de aritmética e álgebra no século XII, que, presume-se, foram livros-texto voltados para o ensino. As evidências abundantes sobre os trabalhos desse astrônomo, que nasceu em 1114, indicam que eram bastante influentes na época".

Uma das obras que se conservou ao longo dos séculos e é atribuída a Bhāskarācārya é o Siddhāntaśiromani, que foi dividido em quatro partes, sendo elas: *Līlavātī, Bījaganita, Golādhyāya* e *Gaṇitādhyāya*. Josefh (2016) afirma que Bhāskarācārya ficou muito conhecido por causa desse copilado de obras, que foi escrito em 1150, quando ele tinha 36 anos. A seguir, visualiza-se, na Figura 1, o frontispício das traduções dos quatros tratados supracitados.

Figura 1 - Composição do Siddhāntaśiromani



Fonte: Bhāskarācārya (1816, 1813, 1842, 1881).

10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

Siddhāntaśiromani, segundo alguns autores[2], é organizado começando por *Līlāvatī*, seguido do *Bījaganita* e *Gaṇitādhyāya* e finalizado pelo *Golādhyāya*. Esse copilado de obras foi estudado por matemáticos indianos, tendo o *Līlāvatī* mais traduções, registrando uso no século XX em escolas da Índia (PATWARDHAN; NAIMPALLY; SINGH, 2006).

Em 1634, Ata Allah Rashidi traduziu para o persa esse tratado e uma versão inglesa foi publicada por Edward Strachey, em 1813, na qual dividiu o livro em seis partes: (1) Introdução; (2) Sobre equações simples (1º grau); (3) Sobre equações quadráticas; (4) Sobre equações envolvendo questões indeterminadas do 1º grau; (5) Sobre equações envolvendo questões indeterminadas do 2º grau e (6) Sobre equações envolvendo retângulos(BHĀSKARĀCĀRYA, 1813). Os livros *Golādhyāya* e *Gaṇitādhyāya* se referem à Astronomia. Conforme Josefh (2016, p. 291, tradução nossa),

> A primeira seção de Siddhantasiromani, o Ganitadhyaya, contém uma discussão de métodos computacionais para calcular medidas como movimentos médios, movimentos verdadeiros, eclipses solares e lunares que formavam o modelo padrão do trabalho astronômico daquele período. A segunda seção, Goladhyay, contém assuntos relacionados à gola (ou a esfera) incluindo a forma e a forma da esfera e sua relevância para a terra esférica. Essa discussão é intercalada com uma interpretação poética da majestade das estações e perguntas para testar o conhecimento dos leitores.

Līlavātī apresenta diversas definições, métodos matemáticos e 119 problemas com aplicações do conteúdo proposto, envolvendo uma Matemática prática, que ensina o saber/fazer. O livro não traz demonstrações, indicando um público-alvo mais geral (SILVA, SILVA, PEREIRA, 2018).

A tradução[3] *Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry* foi realizada por John Taylor e foi publicada em Bombaim, cidade ao sudoeste da Índia, em 1816. Essa edição se encontra no acervo da coleção da biblioteca de Cambridge e foi feita a partir de um trabalho colaborativo com a Royal Asiatic Society, da Grã-Bretanha e Irlanda. Nessa, são mostrados alguns conceitos matemáticos introdutórios, como a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão, cujo tradutor alega que merecem atenção, pois as operações são apresentadas por Bhāskarācārya de um modo singular, que não há em nenhum outro livro didático. A seguir, Taylor (1816) expõe a descrição das partes de Līlavātī de acordo com o Quadro 1.

[2] Patwardhan, Naimpally e Singh (2006), Josefh (2016).
[3] Existem outras traduções para o inglês, para mais informações, verificar o artigo de Freire e Pereira (2021).

10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

Quadro 1 - Conteúdo de Līlavātī na versão Taylor (1816)

Parte	Conteúdo
I	(1) Tabelas de dinheiro, pesos etc.; (2) Adição e Subtração; (3) Multiplicação; (4) Divisão; (5) O quadrado; (6) Raiz quadrada; (7) Cubo; (8) Raiz cúbica; (9) Frações; (10) O Efeito da Cifra; (11) Inversão; (12) Um número presumido; (13) Multiplicador da Raiz; (14) Regra das três quantidades; (15) Regras de Cinco etc. quantidades; (16) Regra de trocas; (17) Quantidades mistas; (18) Comprando e vendendo; (19) Computando ouro; (20) Permutação; (21) Progressão.
II	**Capítulo I:** Operações Geométricas. **Capítulo II: Seção I** – Dos círculos; **Seção II –** De libras; **Seção III –** Dos tijolos ou pedras em parede; **Seção IV –** Do Corte de madeiras etc.; **Seção V –** De montes; **Seção VI –** Das sombras.
III	**Seção I –** Do Kutaka; **Seção II -** Do Sthira ou Kutaka Fixo; **Seção III –** Do Sanslista Kutaka.
IV	Das transposições; Apêndice.

Fonte: Adaptado de Taylor (1816).

No Quadro 1, percebe-se que Taylor (1816) faz uma divisão por áreas da Matemática, as quais envolve Aritmética, Geometria e Álgebra. No entanto, é perceptível que os títulos das partes estão atrelados a aspectos do contexto indiano, como, por exemplo, na parte 1, pode-se encontrar “comprando e vendendo”, “computando ouro” e, na parte II, aparecem as sombras, lagoas, entre outros.

Ao longo da tradução, Taylor (1816) tece comentários sobre os registros de Bhāskarācārya, explicando detalhadamente algumas passagens por meio da Matemática atual. Além disso, ele esclarece alguns termos de origem indiana, como, por exemplo, a Kutaka, que se refere a termos desconhecidos presentes em problemas da terceira parte de *Līlavātī*. Por fim, Taylor (1816) apresenta um anexo com figuras presentes em *Līlavātī*, que ajudam a entender os problemas referentes à Geometria.

Em relação aos aspectos matemáticos, *Līlavātī* traz uma gama de conteúdos que podem ser utilizados na Educação Básica, tais como adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais e frações, áreas, volumes, equações do 1º grau, propriedades dos triângulos, entre outros. A seção a seguir é dedicada aos conceitos envolvendo regra de três inversa.

3 REGRA DE TRÊS INVERSA EM *LĪLAVĀTĪ*

A regra de três no tratado *Līlavātī* é o décimo quarto conteúdo apresentado, se dividido em duas partes, a regra de três direta[4] e a regra de três inversa. Quanto a esta última, o autor é sucinto, trazendo apenas um comentário de quando utilizá-la, mencionando exemplos que podem ser percebidos no trecho a seguir:

> Se a quantidade cujo produto é demandado aumenta enquanto seu produto diminui; ou se a quantidade cujo produto é demandado diminui, enquanto seu produto aumenta,

[4] Para mais informações a respeito dessa, verificar em Freire e Pereira (2022).

10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

> isto é, se houver uma diminuição de seu produto enquanto a quantidade cujo produto é demandado aumenta, ou se houver um aumento de seu produto enquanto a quantidade cujo produto é demandado diminui, então aqueles que são hábeis na Regra das Três Quantidades a chamam de Inversão. Essa regra é usada na avaliação dos animais de acordo com a idade, na pesagem do ouro de uma determinada cor e também quando há diminuição das quantidades (BHASKARACARYA, 1816, p. 42).

Dessa maneira, percebemos que esse conceito estava ligado à cultura e às ações daquela época, em que estão o ouro e os animais, que eram imersos cotidianamente na vida dos indianos. Veremos isso nos quatro problemas que aparecem na mesma seção e serão apresentados mais na frente. Outro ponto citado por Bhāskarācārya é a regra da inversão, apresentada em seu tratado anteriormente como a regra das três quantidades, nessa parte, ele afirma que

> Qualquer quantidade sendo conhecida, para encontrar a quantidade desconhecida, faça do divisor o multiplicador e do multiplicador o divisor. Do quadrado a raiz quadrada, e da raiz quadrada o quadrado. Faça também da negativa a afirmativa e da afirmativa a negativa. Se houver uma fração positiva, adicione o numerador ao denominador, se for uma fração negativa, subtraia-a para um denominador, o numerador de ambas permanece inalterado. Em seguida, prossiga com a operação subsequente da maneira inversa acima indicada (BHASKARACARYA, 1816, p. 31).

Nesse contexto, observa-se que, ao nos depararmos com um problema de regra de três inversa, utilizando um dos contextos que Bhāskarācārya citou, devem-se fazer as operações inversas. No caso da regra de três inversa, devemos fazer o contrário da regra de três direta. Com a regra da direta, menciona que: "Multiplique o meio termo pela quantidade cujo produto se procura e, divida o produto assim obtido pelo primeiro termo. O quociente será o produto pretendido" (BHASKARACARYA, 1816, p. 41). Freire e Pereira (2022, p. 6-7) chega à conclusão que a regra de três direta é dada por:

$$B = \frac{C \times D}{A}$$

Nos quais,

Quantidade referente ao termo médio (terceiro termo) – C

Quantidade referente ao produto exigido (quarto termo) – D

Quantidade referente ao produto dado (primeiro termo) – A

Quantidade referente ao produto pretendido (segundo termo) – B.

Visto isso, tem que ser feito o inverso dessa regra para se obter uma fórmula para encontrar a regra de três inversa. Sabendo-se que o contrário da multiplicação é a divisão e que, consequentemente, o da divisão é a multiplicação, a regra ficaria da seguinte maneira: divida o meio termo (C) pela quantidade cujo produto se procura (D) e multiplique o produto assim obtido pelo primeiro termo (A). O produto será o produto pretendido (B). Logo, teríamos:

$$B = \frac{C}{D} \times A = \frac{C \times A}{D}$$

10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

Desse modo, salientamos que Bhāskarācārya não apresenta como fazer isso, apenas dirigiu o leitor a seguir a lei da inversão na regra. Essa ação dele nos leva ao ensino de hoje, já que, para executar um problema de regra de três com grandezas inversamente proporcionais, inverte-se o posicionamento da segunda proporção.

Após a explicação de onde utilizar a regra de três, Bhāskarācārya expõe quatro problemas com suas respectivas declarações, que podem ser vislumbrados a seguir:

> **Exemplo**: Uma menina de dezesseis anos é comprada por trinta e dois niskas. Quanto custará uma menina de vinte anos?
>
> **Declaração**. 16, 32, 20. Produto: 25 niskas, 9 drammas, 9 panas, 2 kakinis, 8 waratakas.
>
> **Exemplo**: Os bois que araram quatro anos custam quatro niskas. Quanto custarão os bois que araram doze anos?
>
> **Declaração.** 2, 4, 6. Produto: niska e a fração $\frac{1}{3}$.
>
> **Exemplo**: Um gadyanaka de ouro de dez cores é obtido para um niska. Quantos de quinze cores serão obtidas?
>
> **Declaração.** 10, 1, 15. Produto: $\frac{2}{3}$.
>
> **Exemplo**: Um monte de grãos medido por uma medida de sete arakas dá cem medidas. Quantas medidas ele dará, medida por uma medida de cinco arakas?
>
> **Declaração.** 7, 100, 5. Medidas obtidas: 140.

As declarações expostas após os problemas contêm as quantidades envolvidas no problema e o seu resultado final. Ressaltamos que Bhāskarācārya não mostra a solução do problema, deixando-a a cargo do leitor. O primeiro problema envolve compra de pessoas/escravos, e sabe-se que, antigamente, quanto mais novo era, maior seria o seu preço ou vice-versa.

Nesse sentido, o problema alega: “Uma menina de dezesseis anos é comprada por trinta e dois niskas. Quanto custará uma menina de vinte anos?” (BHASKARACARYA, 1816, p. 42). Podemos perceber que se a idade aumenta, o preço diminui, com isso, podemos usar a regra de três inversa. Dessa forma, percebe-se que a quantidade referente ao produto dado (A) é igual a 16, o termo médio (C) é 32 e a quantidade do produto requerido (D) é 20; aplicando-se isso na regra citada anteriormente, obtém-se que

$$B = \frac{C \times A}{D} = \frac{32 \times 16}{20} = \frac{512}{20} = \frac{500}{20} + \frac{12}{20} = 25 + \frac{3}{5} = 25\frac{3}{5}$$

Porém, observamos, na declaração, que Bhāskarācārya verificou que são “25 niskas, 9 drammas, 9 panas, 2 kakinis, 8 waratakas” (BHASKARACARYA, 1816, p. 42). Nesse

ISSN: 2526-2149

10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

contexto, Bhāskarācārya utilizou a seguinte tabela (Figura 2) de medidas, para transformar os $\frac{3}{5}$ de niskas nas demais unidades.

Figura 2 - Tabela de dinheiro

TABLE OF MONEY.[A]

20 Varataka[B]	....	1 Kakini
4 Kákini	....	1 Pana
16 Pana	....	1 Dramma
16 Dramma	....	1 Niska

Fonte: Bhāskarācārya (1816, p. 1).

Destarte, precisa-se encontrar quanto equivalem $\frac{3}{5}$ de niskas em drammas, como 1 **niska** equivale a 16 drammas, então, $\frac{3}{5}$ de 16 $= \frac{3}{5} \times 16 = \frac{48}{5} = \frac{45}{5} + \frac{3}{5} = 9 + \frac{3}{5} = 9\frac{3}{5}$. Logo, $\frac{3}{5}\ de\ niskas$ é $igual\ a\ 9\frac{3}{5}\ drammas$. Em seguida, transformam-se $\frac{3}{5}$ de drammas em panas, como 1 dramma é 16 panas, então, $\frac{3}{5}\ de\ 16 = \frac{3}{5} \times 16 = \frac{48}{5} = \frac{45}{5} + \frac{3}{5} = 9\frac{3}{5}$. Assim, $\frac{3}{5}$ de drammas correspondem a $9\frac{3}{5}$ palas. Prossegue-se transformando $\frac{3}{5}$ de palas em kakinis, sabendo que 1 pana equivale a 4 kakinis, então, $\frac{3}{5} de\ 4 = \frac{3}{5} \times 4 = \frac{12}{5} = \frac{10}{5} + \frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5} = 2\frac{2}{5}$. Nesse contexto, tem-se que $\frac{3}{5}\ de\ palas\ são\ iguais\ a\ 2\frac{2}{5}$ de kakinis. Por último, transformam-se $\frac{2}{5}\ de$ kakinis em varatakas, como 1 kakini equivale a 20 varatakas, então, $\frac{2}{5}\ de\ 20 = \frac{2}{5} \times 20 = \frac{40}{5} = 8$. Portanto, $\frac{2}{5}$ de kakinis são iguais a 8 varatakas. Desse modo, conclui-se que $25\frac{3}{5}$ drammas podem ser substituídos por 25 niskas, 9 drammas, 9 panas, 2 kakinis, 8 varatakas, de acordo com a declaração proposta por Bhāskarācārya.

O problema 2 traz aspectos da agricultura, indagando: Os bois que araram quatro anos custam quatro niskas. Quanto custarão os bois que araram doze anos? Na declaração, aparece que as quantidades envolvidas são 2, 4 e 6, com isso, verificou-se que, nos comentários, Taylor (1816, p. 42) complementa afirmando: “Um boi é colocado no arado aos seis anos de idade, e arada por 6 dhu ou 12 anos, sendo um dhu igual a 2 anos”. Dessa forma, observa-se que Bhāskarācārya transformou para dhu antes de resolver o problema.

10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

Ao analisar o problema, seguindo a expressão matemática da regra de três inversa, percebe-se que A = 4, C = 2 e D = 6. Substituindo, tem-se: $B = \frac{A \times C}{D} = \frac{4 \times 2}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$. À vista disso, conforme indicado na declaração, o resultado final é $1\frac{1}{3}$ de niskas.

No terceiro problema, aparece a compra de derivados do ouro, em que se pergunta: “Um gadyanaka de ouro de dez cores é obtido para um niska. Quantos de quinze cores serão obtidas?” (BHASKARACARYA, 1816, p. 42). Nesse problema, averigua-se que A = 1, C = 10 e D = 15, posto isso, tem-se: $B = \frac{A \times C}{D} = \frac{1 \times 10}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. Por fim, o resultado vai ao encontro da declaração que afirma: “10, 1, 15. Produto: $\frac{2}{3}$” (BHASKARACARYA, 1816, p. 42).

No quarto problema: “Um monte de grãos medido por uma medida de sete arakas dá cem medidas. Quantas medidas ele dará, medida por uma medida de cinco arakas?” (BHASKARACARYA, 1816, p. 42). Pode-se notar que outro problema traz a agricultura, no qual podemos identificar que A = 7, C = 100 e D = 5. Nessa perspectiva, aplicando-se a regra de Bhāskarācārya, tem-se: $B = \frac{A \times C}{D} = \frac{7 \times 100}{5} = \frac{700}{5} = 140$. O resultado corrobora a declaração que afirma: “Medidas obtidas: 140” (BHASKARACARYA, 1816, p. 42).

4 CONSIDERAÇÕES DIDÁTICAS

A décima quarta parte da Aritmética, a regra de três simples e inversa, traz diversos conceitos que conversam com a Educação Básica, entre os quais, podemos citar as relações entre grandezas, as operações com frações, as frações mistas, as transformações de medidas, entre outros.

Assim, o texto histórico contribui para o professor desenvolver, em seus alunos, o que está posto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que rege o ensino atualmente, orientando a partir de uma perspectiva curricular, na qual os docentes devem buscar modos de ensinar a partir do que é proposto por ela. Nesse contexto evidenciamos a primeira competência[5] específica da matemática, que menciona:

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2018, 267).

[5] “Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2018, p. 8).

10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

Averiguando a competência e o trecho de *Līlavātī* apresentado neste artigo, notamos que os professores/alunos podem verificar a prática matemática indiana do século XII. Sabendo quais grandezas eram inversas, podemos ter a possibilidade de vivenciar diversas unidades de medidas daquela época e suas respectivas transformações.

Ainda é possível explorar o contexto em que as matemáticas eram utilizadas naquele período, podendo vislumbrá-las na agricultura (arado de terras), no comércio de escravos, na fabricação e no comércio de elementos com ouro. Assim, o estudo da Matemática se torna significativo, trazendo usos do cotidiano, mostrando sua utilidade e não seus meros cálculos.

Outro ponto a ser considerado é o inverso das operações, que é citado por Bhāskarācārya e que pode ser levado para a sala de aula, ajudando os alunos a perceberem as relações existentes entre elas. Entendendo isso, os alunos podem investigar como transformar a fórmula resolutiva da regra de três direta em outra que resolve problemas de regra de três inversa, já que o autor deixa subentendido essa transformação. Logo, estaremos estimulando, a quarta e a sexta, competências, relacionadas a Matemática da BNCC, as quais discorrem:

> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes (BRASIL, 2018, p. 267).
>
> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (BRASIL, 2018, p. 267).

Desse modo, através dessa regra e desses problemas, pode-se permitir, aos estudantes, uma imersão em outra cultura, que esteve praticando matemáticas que merecem ser estudadas e divulgadas, sendo que, por meio delas, torna-se o ensino significativo e instigante, permitindo entender a construção do conhecimento matemático. Esses conceitos também estão presentes em habilidades[6] da disciplina de matemática da BNCC dos anos finais do Ensino Fundamental, algumas podem ser vislumbradas no Quadro 2.

[6] "As habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares" (BRASIL, 2018, p. 29).

10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

Quadro 2 - Algumas habilidades da BNCC

(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas(BRASIL, 2018, p. 307).
(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas(BRASIL, 2018, p. 313).
(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas(BRASIL, 2018, p. 317).

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018).

Assim, *Līlavātī* serve de apoio didático para o ensino de Matemática, mais precisamente, para o ensino de regra de três inversa, que foi abordada neste artigo, trazendo 4 problemas e uma regra, em que aparecem conceitos que são estudados atualmente, permitindo discussões entre a Matemática do presente e a do passado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao voltar-se ao objetivo deste artigo, podemos perceber que a discussão da regra de três simples e inversa nos permitiu fazer articulações de conceitos expostos no século XII com o documento que rege atualmente o ensino no Brasil, a BNCC. Dessa maneira, podemos vislumbrar vários conteúdos, tais como frações, transformações de unidades de medidas, proporções, em somente um trecho de *Līlavātī*. Isso atesta a singularidade dessa obra, que pode ser utilizada na formação de professores e, consequentemente, no ensino de Matemática.

Nesse sentido, constatamos que outros textos históricos devem ser estudados e disponibilizados em redes de fácil acesso, como revistas e livros, para que possam ser explorados por professores que desejam utilizar nas suas aulas; visto que uma das dificuldades de se trabalhar com texto históricos é que a maioria não se encontra traduzido para a língua portuguesa, como é o caso de *Līlavātī*, que está disponível apenas em sânscrito e inglês.

Destarte, nota-se a relevância da construção da regra de três inversa e da sua aplicação nos problemas, pois alunos estarão construindo seus conhecimentos, uma vez que Bhāskarācārya não menciona a resolução das indagações, deixando-a a cargo do leitor, fazendo com que este investigue sobre a regra de três direta, para então fazer a transformação e aplicar nas questões. Também nesses problemas, o professor pode explorar a cultura indiana, já que eles são práticos, ou seja, trazem os fazeres daquela época que podem e devem ser citados, tornando o ensino de Matemática significativo.

Portanto, concluímos que a regra de três simples e inversa pode vir a ser potencialmente didática para a sala de aula e, quanto a isso, estão sendo desenvolvidos estudos mais

ISSN: 2526-2149
10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

aprofundados nessa parte e em torno de *Līlavātī*, para que possamos divulgar atividades didáticas que explorem essa parte. Por fim, esperamos que este trabalho sirva de base para que outras pessoas se interessem em estudar e divulgar textos históricos.

Referências

BHĀSKARĀCĀRYA. **BijaGanita**: or, the algebra of the hindus. Tradução de: Edward Strachey. London: W. Glendinning, 1813.

BHĀSKARĀCĀRYA. **Lilawati**: or a treatise on Arithmetic and Geometry. Tradução de: John Taylor. Bombay: Literary society of Bombay, 1816.

BHĀSKARĀCĀRYA. **Ganitadhyaya**. Tradução de: Pandit Vidyasagara. Calcutá: SARASWATI, 1881.

BHĀSKARĀCĀRYA. **The Goladhia:** A Treatise On Astronomy. Tradução de: Wilkinson Calcutá: Baptist Mission, 1842.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

FREIRE, Dianara Figueirêdo; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Os versos de Līlavātī como recurso didático para o ensino da regra de três simples e direta na Educação Básica. **Revista História da Matemática para Professores**, *[S. l.]*, v. 8, n. 1, p. 1–13, 2022.

FREIRE, Dianara Figueirêdo; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Uma breve descrição do tratado Līlāvatī Of Bhāskarācārya do Século XII. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 10, p. 119-135, 2021.

JOSEPH, George Gheverghese. **Indian Mathematics:** Enganing with the Word from Ancient to Modern Time. Canadá: World Scientific, 2016.

MENDES, Iran Abreu. **História da Matemática no Ensino**: Entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

PATWARDHAN, Krishnaji Shankara; NAIMPALLY, Somashekhara Amrita; SINGH, Shiam Lal. Introduction. In: **A Teatrise of Mathematics of Vedic Tradition**. New Delhi: Motilal Banarsidass, 2006.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico: Métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Rio Grande do Sul: Universidade Feevale, 2013.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 19, n. 1, p. 89-111, mar. 2013.

10.23926/RPD.2023.v8.n1.e23025.id1699

SILVA, Denivaldo Pantoja da. **A invariável prática da regra de três na escola**. Tese. (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas), Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém-PA, 2017.

SILVA, Isabelle Coelho da; SILVA, José Hélison da; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Os versos de Lilavati como fonte histórica para o ensino de Matemática: propondo uma prática. **REMAT**, Bento Gonçalves (RS), v. 4, n. 1, p. 78-87, 2018.

SOUSA, Jeyze Santos de; PEREIRA, Ana Carolina Costa; SILVA, Isabelle Coelho da. Uma proposta envolvendo atividades históricas investigativas a partir da revista AL-KARISMI, de Malba Tahan: estudando quadrados mágico. **Revista Prática Docente**, Mato Grosso, v. 4, ed. 2, p. 482-498, 2019.

TAYLOR, John. Introduction. In: **Lilawati**: or a treatise on Arithmetic and Geometry. BHĀSKARĀCĀRYA. Bombay: Literary society of Bombay, 1816.