RAZÕES PARA UMA ABORDAGEM SEMIÓTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Tradução disponibilizada pelos próprios autores do artigo "Reasons for a semiotic approach to mathematics education", publicado na Revista Prática Docente em junho de 2019.

DOI: http://dx.doi.org/10.23926/RPD.2526-2149.2019.v4.n1.p24-41.id350

Michael Friedrich Otte
Doutor em Matemática pelas Universidade de Goettingen e Universidade Munster (Alemanha)
Professor visitante estrangeiro na Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)
michaelontra@aol.com

Geslane Figueiredo da Silva Santana
Doutoranda na Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)
Professora na Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)
geslanef@hotmail.com

Luciene de Paula
Doutoranda em Educação na Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)
Técnica em Assuntos Educacionais na Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)
luciene.ufmt@gmail.com

Luiz Gonzaga Xavier de Barros
Doutor em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP)
Professor na Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN)
lgxbarros@hotmail.com

Resumo: A abordagem semiótica no processo ensino-aprendizagem é assunto recente e, especialmente na matemática, vem, gradativamente, descontruindo a ideia platônica de que ela seja uma ciência infalível e inquestionável, isso porque cada vez mais é evidenciado que os sentidos das coisas se desenvolvem nas relações sociais. Objetiva-se apresentar razões para o uso da abordagem semiótica na educação matemática, defendendo que a cristalização dos conceitos matemáticos limita a criatividade e distancia a escola do mundo real, a qual deve estar aberta a possibilidades interpretativas. Nessa pesquisa teórica, são abordadas questões como *O que é o x em uma equação*?, evidenciando-se as pesquisas dos teóricos Frege e Benacerraf, assim como a semiótica peirceana; são apresentados exemplos importantes dessa perspectiva, como a complementaridade entre texto e diagrama, propondo reflexões críticas acerca dos resultados esperados da educação na disciplina matemática, uma vez que os objetos matemáticos são abstratos. Portanto, pensar semioticamente é reconhecer que todo conhecimento é dinâmico, apesar de ser construído por meio de signos, implicando em responsabilidades, seja na escolha da estratégia definida para cada situação problema, seja na identificação dos significados de acordo com as referências dadas, ou ainda na interação com o mundo.

Palavras-chave: Educação Matemática; Filosofia da Matemática; Semiótica; Matemática.

1 INTRODUÇÃO

A educação matemática tem sido objeto de estudos em diferentes linhas teóricas que buscam as razões da objeção à semiótica na didática e na história da matemática sejam as mesmas, consistindo no fato de que professores de matemática e matemáticos, acreditam saber o que seja realmente a matemática, concebendo-a como uma disciplina pronta e acabada. Em contraste a esse pensamento, a abordagem semiótica assume o conhecimento humano como incompleto, em que a forma e o conteúdo das teorias matemáticas não podem ser definitivas.

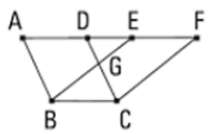
Na abordagem semiótica, os sentidos das coisas são desenvolvidos nas relações sociais e não podem ser reduzidos completamente ao simples uso de símbolos, embora não sejam separáveis deles. Por isso, é difícil responder perguntas fundamentais que inquietam até mesmos as crianças já no Ensino Fundamental, como por exemplo: *O que é o x?* Não se pode perguntar, real e definitivamente, *o que é o x*, uma vez que, todo pensamento e toda comunicação ocorrem por meio de signos, não fornecendo a referência nem o sentido definitivo de um signo.

Ainda que intuitivamente fosse possível saber o que é *B* ou *X*, tal informação não poderia ser agregada ao nosso conhecimento, haja vista que, como diz Kant: "Pensamentos sem conteúdo são vazios; intuições sem conceitos são cegas[1]" (1998, A 51/ B 75, tradução nossa).

Qualquer prova geométrica ou algébrica baseia-se em alguma interdependência mútua de texto e diagrama, os quais se mostram complementares. O diagrama fornece um contexto que ajuda a estabelecer referências e a indicar os significados de certos termos. O texto, operando com base em concepções, ou seja, em termos universais, aponta as possibilidades para a generalização de uma determinada prova. O diagrama é muitas vezes percebido por intermédio de suas características particulares, as quais são frequentemente ocasionais, ou seja, o diagrama é comumente identificado como um objeto específico.

Por exemplo, na curta prova do teorema 35 do Livro I dos *Os Elementos* de Euclides, a palavra *igual* ocorre mais de 10 vezes com três significados diferentes: congruência de figuras planas, igualdade de área e identidade numérica.

> Os paralelogramos que estão sob a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si. Sejam os paralelogramos ABCD e EBCF, sobre a mesma base BC e nas mesmas paralelas AF, BC; digo que o ABCD é igual ao paralelogramo EBCF. Pois, como o ABCD é um paralelogramo, a AD é igual à BC. Pelas mesmas coisas, então, também a EF é igual à BC; desse modo, também a AD é igual à EF; e a DE é comum; portanto, a AE toda é igual à DF



[1] Thoughts without content are empty; intuitions without concepts, blind.

> toda. Mas também a AB é igual à DC; então, as duas EA, AB são iguais às duas FD, DC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob FDC é igual ao sob EAB, o exterior, ao interior; portanto, a base EB é igual à base FC, e o triângulo EAB será igual ao triângulo DFC; fique subtraído o DGE comum; portanto, o trapézio ABGD restante é igual ao trapézio EGCF restante; fique adicionado o triângulo GBC comum; portanto, o paralelogramo ABCD todo é igual ao paralelogramo EBCF todo. Portanto, os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si; o que era preciso provar. (EUCLIDES, 2009, p.124).

A figura que representa um diagrama fornece as características particulares por meio da intuição e da representação desse diagrama, sendo possível, intuitivamente, conjeturar que esses paralelogramos são iguais entre si. Contudo, é no texto que se pode ter possibilidades para a generalização. Entretanto, mesmo nessa prova, depara-se com a dificuldade de interpretação designada à palavra *igual* e com o problema do significado do conceito de *igual*. Um matemático pode demonstrar esse teorema, usando as mesmas ferramentas de Euclides ou até mesmo decorar essa demonstração, mas um professor de matemática, precisa ir além disso e explicar essas diferenças de significado.

Nesse sentido, objetiva-se apontar razões para o uso da abordagem semiótica na educação matemática evidenciando-se as pesquisas dos teóricos Frege e Benacerraf, assim como a semiótica peirceana. Defende-se que a cristalização dos conceitos matemáticos limita a criatividade e distancia a escola do mundo real, a qual deve estar aberta a possibilidades interpretativas. Incentiva-se reflexões críticas para questões como *O que é o x em uma equação?*, uma vez que os objetos matemáticos são abstratos. Considera-se que todo conhecimento é dinâmico, apesar de ser construído por meio de signos, implicando que esse nunca será final, completo e definido.

2 CRISTALIZAÇÃO DA MATEMÁTICA VERSUS EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O caráter aparentemente estático e infalível do conhecimento matemático é um dos grandes problemas para desenvolver a educação matemática. Tudo aparenta ser igual a si mesmo, ou seja, $A = A$. Esse princípio de identidade é o cerne da lógica ou das ciências exatas e, obviamente, é guiado pela linha que segue contra qualquer preocupação histórica ou evolutiva. *A* significa apenas *A*. Nenhum comentário, nenhuma investigação histórica, nem consideração psicológica ou filosófica pode adicionar qualquer coisa ao assunto. A matemática parece tão imutável e absoluta que, desde o início, a sociologia e a história sociocultural do conhecimento não foram incluídas entre as prováveis considerações. (MANNHEIM, 1929, apud OTTE, 2012, p. 123).

Nesse contexto, é frequentemente considerado, em particular por matemáticos, que a matemática não tem uma história que valha a pena conhecer. O recente estado da arte da matemática retomou e reformulou, em termos definitivos, quais tópicos devem ser estudados na história da matemática. Alguns matemáticos afirmam que quaisquer considerações adicionais às idas e vindas na história da matemática não são relevantes à educação matemática. Se houver uma história sobre algum fato matemático, ela será mais um passatempo, pois a opinião comum do que constitui as principais tendências da matemática ao longo dos séculos, é o padrão aceito por todos, ou seja, a história da matemática é parcialmente um dogma constituída por anedotas ou histórias biográficas. Essa atitude dogmática, baseada em uma discussão casual e individualista, exclui todas as visões intrínsecas da matemática, como a realidade das coisas abstratas e universais inibindo os registros para reflexões científicas, tais pontos de vista são resultado do nominalismo filosófico e de uma superestimação da criatividade individual.

Olhando para a matemática dessa maneira, percebe-se que ela é introduzida como um conjunto de obras concluídas e teorias finalizadas que, às vezes, podem revelar sua beleza secreta para um talentoso estudante, mas sendo algo que não pode ser ensinado, aprendido e nem mesmo comentado. É apresentada como uma mera forma da realidade, ou uma realidade *sui generis*, a qual não tem relação com as atividades ou emoções humanas. Tal visão não permite, por exemplo, considerar problemas não resolvidos. Isso não é bom, porque os grandes problemas e programas de sua investigação representam a maior parte da história *real* da matemática (OTTE, 2012, p. 123-124). Portanto:

> O homem cria suas representações mecanicamente: aquilo que o homem faz, acredita, conhece e pensa sofre interferência também das ideias (representações) anteriormente elaboradas; ao mesmo tempo, as novas representações geram transformações na produção de sua existência (ANDERY et al, 2014, p.12).

O ser humano é um ser histórico, isso é fato! Todavia, a história pode ser lida de muitas maneiras e são exatamente nas diferenças, nas idas e vindas, nas peculiaridades, nos avanços e retrocessos que se caracteriza a incerteza e se descobre a atividade matemática. A importância que se atribui aos acontecimentos históricos e a reflexão que se faz sobre eles, é que possibilita ao homem ser sujeito social, que depende da comunicação cultural, histórica, e social e, é justamente nesse novo contexto, que a educação matemática ganhou seu espaço.

O sucesso da educação matemática não depende de revisões de conteúdo e metodologias excessivamente elaboradas, mas da dinamização da própria matemática ao interagir entre a prática e o conhecimento, ou seja, depende fundamentalmente de o professor reconhecer que a matemática é parte integrante do conhecimento que se renova e se fortalece por meio das experiências vivida por todos.

3 A INTERPRETAÇÃO DE FREGE PARA A=B

Toda atividade científica, em particular a atividade matemática, começa fazendo perguntas e considerando problemas. Hilbert enfatizou isso em seu discurso no Congresso Internacional em Paris em 1900:

> O profundo significado de certos problemas para o avanço da ciência matemática em geral e o importante papel que desempenham no trabalho particular do investigador não devem ser rejeitados. Enquanto um ramo da ciência continua a oferecer grande abundância de problemas, então esta ciência está viva. A falta de problemas prefigura a extinção ou a interrupção do livre desenvolvimento. Assim como todo empreendimento humano persegue certos objetos, a pesquisa matemática também necessita ter seus próprios problemas. É por meio da solução dos problemas que o investigador se encontra, descobre novos métodos e novas perspectivas, e ganha um horizonte mais amplo e mais livre[2] (1990, p. 1, tradução nossa).

Portanto, faz sentido olhar a matemática a partir de uma perspectiva evolutiva ou histórica, do mesmo modo como se aceita que o conhecimento científico é incompleto e se desenvolve com a humanidade. A abordagem semiótica se torna realmente importante quando se admite que o nosso conhecimento nunca será final, completo e definitivo.

A matemática trata das relações do igual e do diferente. Dessa forma, $A = B$ é o diagrama mais importante para a matemática, embora esse diagrama possa ser interpretado de maneiras essencialmente diferentes: como uma relação entre dois signos que representam o mesmo objeto ou como uma relação entre dois objetos que possuem propriedade em comum.

O alemão matemático, lógico e filósofo Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 - 1925) optou pela primeira interpretação para lidar com o problema dos contextos intencionais. Seu exemplo clássico foi que *Héspero*, nome da *Estrela da Tarde*, e *Fósforo* ou *Lúcifer*, nome da *Estrela da Manhã*, representam o mesmo objeto, ou seja, o planeta Vênus.

A identidade do objeto, no entanto, não torna correto chamar *Vênus* à tarde de *Fósforo*, porque se poderia alegar que não há relações linguísticas em jogo. O que se diz, de fato, é que o corpo celestial mais brilhante diferente da lua que, às vezes, é visto a preceder o sol nascente no Leste é o mesmo que aquela estrela que, em outras vezes, brilha no Oeste depois do pôr do

[2] The deep significance of certain problems for the advance of mathematical science in general and the important role which they play in the work of the individual investigator are not to be denied. As long as a branch of science offers an abundance of problems, so long is it alive; a lack of problems foreshadows extinction or the cessation of independent development. Just as every human undertaking pursues certain objects, so also mathematical research requires its problems. It is by the solution of problems that the investigator steels himself; he finds new methods and new outlooks, and gains a wider and freer horizon.

sol. Trata-se de um fato empírico. A afirmação de que *Hésperos* é *Fósforo* não tem nada de linguístico em si.

Entretanto, pode-se dizer também que o que se vê à noite é chamado, às vezes, especialmente pela manhã, de *Fósforo* em vez de *Héspero*. E na frase: *Sr.º M. quer saber se Héspero* é *Fósforo*, não se pode substituir *Héspero* por *Fósforo*, porque o *Sr.º M*. não quer saber se *Fósforo* é *Fósforo*.

Frege identificou o sentido, ou o significado, de maneira como as referências são dadas, de modo que os conceitos ou funções necessariamente se referem a um objeto. Frege argumenta em favor da extensionalidade da matemática:

> Para o matemático, não é mais correto e não é mais incorreto definir uma seção cônica como a circunferência da interseção de um plano e a superfície de um cone circular reto do que como uma curva plana cuja equação em relação às coordenadas retangulares é de grau 2. Qual dessas duas definições ele escolhe, ou se ele escolhe outra, é guiada unicamente por razões de conveniência, embora essas expressões nem tenham o mesmo sentido nem evoquem as mesmas ideias.[3] (1952, p. 80, tradução nossa).

Na dinâmica da aquisição do conhecimento, a semiótica desempenha um papel definitivo. As intensões e as extensões assumem maior independência umas das outras. Muda-se constantemente de um ponto de vista intensional, que substitui os objetos por seus conceitos, e volta-se a uma perspectiva extensional, que concebe os objetos como meros elementos de um conjunto e os distingue.

Dois conceitos *A* e *B* não são os mesmos, mesmo que contingencialmente ou necessariamente todos os *A* sejam *B* e vice-versa, porque diferentes conceitos ajudam a estabelecer diferentes tipos de relacionamentos e, assim, influenciam o desenvolvimento cognitivo de maneiras bem diferentes.

No que diz respeito ao crescimento cognitivo, bem como aos fundamentos do conhecimento, parece relevante, ou mesmo essencial, saber qual é a definição escolhida, qual é a perspectiva tomada ou como um problema é representado. Certamente, é importante como um matemático define algo.

---

[3] For the mathematician, it is no more correct and no more incorrect to define a conic section as the circumference of the intersection of a plane and the surface of a right circular cone than as a plane curve whose equation with respect to rectangular co-ordinates is of degree 2.Which of these two definitions he chooses, or whether he chooses another again, is guided solely by grounds of convenience, although these expressions neither have the same sense nor evoke the same ideas.

4 O PROBLEMA DA IDENTIFICAÇÃO

Paul Benacerraf, em *O que números não poderiam ser*[4] (1985, tradução nossa), desenvolveu um argumento filosófico contra o platonismo, que se chama *Problema de Identificação,* nele, defende a existência de um problema fundamental ao reduzir os números naturais à conjuntos puros porque, obviamente, não se pode responder à pergunta: *O que realmente são os números?* Nem mesmo, se convencidos pelos modernos matemáticos platônicos, como Frege, com a crença de que números são classes de conjuntos.

Para a pergunta: *O que realmente são os números?* pode-se dizer que os números são conceitos dados em termos de estruturas axiomáticas como outros conceitos matemáticos. As justificativas dessas estruturas teóricas são fornecidas pelas suas aplicações.

Insistir nas questões absolutas do tipo *O que é?* significaria aceitar que, sendo A um número, a equação $A = B$ teria sentido para qualquer que seja B. Mas, será que B poder ser um número? Então, de fato, para Frege, faz sentido perguntar a qualquer nome ou descrição, se eles denominavam o mesmo objeto ou outros. Daí a queixa em seu argumento de que não poderia dizer, de acordo com sua definição de número, se "[...] Júlio César era um número[5]" (BENACERRAF, 1985, p. 286, tradução nossa).

O trabalho de Benacerraf tornou-se de fato um catalisador significativo na motivação do desenvolvimento do estruturalismo na filosofia da matemática.

O problema com Frege é a sua concepção da lógica como linguagem universal (HEIJENOORT, 1967). Ver a natureza da igualdade na substituibilidade, e Frege faz isso, então a substituibilidade é geralmente limitada a um determinado contexto (FREGE, 1884, parágrafo, 65). Por exemplo, não posso perguntar "[...] se a Inglaterra é o mesmo que a direção do eixo da Terra[6]" (Ibid., parágrafo 66, tradução nossa). Benacerraf comenta que:

> [...] As declarações de identidade só fazem sentido em contextos onde existem possíveis condições de individualização. Se uma expressão da forma "X = Y" tem sentido, só pode ser em contextos em que é claro que ambos, X e Y, são de um mesmo tipo ou de uma mesma categoria [7] (1985, p. 286, tradução nossa).

No entanto, tais categorizações não são absolutas e estáticas, elas dependem da atividade e de seus objetivos e meios. Tome-se como exemplo a teoria do valor econômico. A equação

[4] *What Numbers could not be*.
[5] [...] Julius Caesar was a number.
[6] [...] ob England desselb sei wie die Richtung der Erdaxe.
[7] [...] Identity statements make sense only in contexts where there exist possible individuating conditions. If an expression of the form 'x=y' is to have sense it can only be in contexts where it is clear that both x and y are of some kind or category C.

econômica de duas *commodities*, como *1 terno = 2 pares de sapatos*, depende do contexto, porque o terno e os dois pares de sapatos têm apenas seu valor de troca em comum, e nada mais e, portanto, não podem ser equiparados em outros contextos. Uma pessoa pode precisar de um terno, mas pode não querer novos sapatos em troca, porque ela já possui sapatos. E a situação em que alguém está disposto a trocar um terno por um par de sapatos, obviamente, depende de quão urgentemente ela precisa desses sapatos e quanto os valoriza.

No capítulo de abertura de *Capital*, o sociólogo Karl Marx (1818 – 1883) reflete sobre tais questões:

> Toda coisa útil, como ferro, papel etc., deve ser considerada sob um duplo ponto de vista: o da qualidade e o da quantidade. Cada uma dessas coisas é um conjunto de muitas propriedades e pode, por isso, ser útil sob diversos aspectos. Descobrir esses diversos aspectos e, portanto, as múltiplas formas de uso das coisas é um ato histórico. Assim como também é um ato histórico encontrar as medidas sociais para a quantidade das coisas úteis. A diversidade das medidas das mercadorias resulta, em parte, da natureza diversa dos objetos a serem medidos e, em parte, da convenção. [...] O valor de troca aparece inicialmente como a relação quantitativa, a proporção na qual valores de uso de um tipo são trocados por valores de uso de outro tipo, uma relação que se altera constantemente no tempo e no espaço. [...] Certa mercadoria, um quarto de trigo, por exemplo, é trocado por *x* de graxa de sapatos ou por *y* de seda ou *z* de ouro etc., em suma, por outras mercadorias nas mais diversas proporções. O trigo tem, assim, múltiplos valores de troca em vez de um único. Mas sendo x de graxa de sapatos, assim como y de seda e z de ouro, etc., o valor de troca de um quarto de trigo, então x de graxa de sapatos, ou y de seda ou z de ouro etc. têm de ser valores de troca permutáveis entre si ou valores de troca de mesma grandeza.[8] (MARX, 1967, p. 35-36, tradução nossa).

É da mesma forma que o número surge em todos os contextos de comparação, medição ou contagem, representando a essência desses tipos de relacionamentos. Igualmente o eminente físico Richard Philips Feynman (1918 - 1988), compara as diferentes formulações da mecânica clássica, dadas por Newton, Lagrange e Hamilton e ilustra bem este ponto de vista ao afirmar:

> [...] Matematicamente cada uma das três formulações diferentes, a lei de Newton, o método de campo local e o princípio mínimo, produzem exatamente as mesmas consequências. Então, o que podemos fazer? Você lerá, em todos os livros, que nós não podemos decidir cientificamente entre uma ou outra. [...] Mas psicologicamente elas se diferem, de dois modos. Primeiro, filosoficamente, você gosta ou não gosta delas [...]. Segundo, psicologicamente, elas são diferentes porque são completamente

[8] Every useful thing, as iron, paper, &c., may be looked at from the two points of view of quality and quantity. It is an assemblage of many properties, and may therefore be of use in various ways. To discover the various uses of things is the work of history. So also is the establishment of socially-recognized standards of measure for the quantities of these useful objects. The diversity of these measures has its origin partly in the diverse nature of the objects to be measured, partly in convention. […] Exchange value, at first sight, presents itself as a quantitative relation, as the proportion in which values in use of one sort are exchanged for those of another sort, a relation constantly changing with time and place. […] A given commodity, e.g., a quarter of wheat is exchanged for x blacking, y silk, or z gold, &c. – in short, for other commodities in the most different proportions. Instead of one exchange value, the wheat has, therefore, a great many. But since x blacking, y silk, or z gold &c., each represents the exchange value of one quarter of wheat, x blacking, y silk, z gold, &c., must, as exchange values, be replaceable by each other, or equal to each other.

> incompatíveis, quando se busca supor novas leis. Uma vez que a física é incompleta, e procura-se compreender outras leis, então as formulações de diferentes possibilidades podem fornecer pistas sobre o que poderia acontecer em outras circunstâncias.[9] (1967, p. 53, tradução nossa).

David Joseph Bohm (1917 - 1992) que atuou no campo da física quântica apresenta um argumento adicional nessa direção:

> No século XIX, acreditava-se amplamente que a dinâmica newtoniana e a teoria da dinâmica da onda de Hamilton-Jacobi eram essencialmente as mesmas. No entanto, podemos agora ver que a diferença entre a dinâmica das ondas e a dinâmica das partículas é potencialmente relevante, no sentido de que a primeira pode conduzir de modo natural à teoria quântica, enquanto a última não pode.[10] (1977, p. 383, tradução nossa).

Nestas perspectivas apresentadas, pode-se também conceber A e B como aspectos distintos, ou seja, como diferentes objetos e então ao final concluir que a equação $A=B$ designa um aspecto igual ou uma relação entre estas coisas aparentemente diferentes.

5 ABORDAGEM SEMIÓTICA

Pode causar estranheza a um observador imparcial constatar tamanha obstinação com a qual filósofos discutem a questão acerca da natureza dos objetos matemáticos, enquanto professores de matemática e pedagogos buscam evitar, em suas aulas, questões absolutas do tipo: *O que é*?, por exemplo, *O que é um número?* Os axiomas de Peano não respondem a essa questão. Dessa forma, os números podem ser interpretados como qualquer coisa, como por exemplo: jogos de Hackenbusch e Números de Conway (FONSECA, 2010); Vetores Geométricos (NASCIMENTO, 2013); Tabuleiro de Xadrez (WIELEWSKI, 1998); Programa de Computador (SILVA, 2009) etc. Mesmo no contexto da teoria dos conjuntos, podem ser fornecidas representações muito diferentes do sistema de números como mostrou Paul Benacerraf (1985).

Alguns autores concluem que "[...] detectar ou interagir com objetos matemáticos não parece constituir parte da prática matemática.[11]" (CHIHARA, 2004, p.13, tradução nossa). Em

[9] [...] Mathematically each of the three different formulations, Newton's law, the local field method and the minimum principle, gives exactly the same consequences. What do we do then? You will read in all the books that we cannot decide scientifically on one or the other. That is true. [...] But psychologically they are very different in two ways. First, philosophically you like them or do not like them;[…]. Second, psychologically they are different because they are completely unequivalent when you are trying to guess new laws. As long as physics is incomplete, and we are trying to understand the other laws, then the different possible formulations may give clues about what might happen in other circumstances.

[10] It was widely believed in the nineteenth century that Newtonian dynamics and Hamilton-Jacobi wave theory of dynamics were essentially the same. Nevertheless we can now see that the difference between wave dynamics and particle dynamics was potentially of very great relevance in the sense that the form can lead in a natural way to quantum theory, while the latter cannot.

[11] [...] detecting or interacting with mathematical object does not seem to constitute any part of mathematical practice.

contrapartida, sabe-se que existe uma grande variedade de interpretações em relação aos modelos da aritmética que contribuem para a compreensão do conceito de número e também ajudam a evitar tanto o essencialismo[12] estático quanto o nominalismo[13] simples. Mesmo a aritmética, não descreve objetos matemáticos específicos, em vez disso, apenas faz a descrição das relações estruturais.

A perspectiva de que todo pensamento ocorre em termos de signos, resulta que interpretar algo significa representá-lo. Conforme o cientista, lógico e filósofo Charles Sanders Peirce (1839-1914):

> O homem faz a palavra, e a palavra não significa nada mais do que o homem a faça significar, e isto apenas a alguns homens. Mas já que o homem pode pensar apenas por meio de palavras ou outros símbolos externos, elas podem virar-se e dizer: "Você não é nada mais do que aquilo que te ensinamos, e apenas na medida em que você se dirija a uma palavra como interpretante do seu pensamento". [...] A palavra ou o signo que o homem usa é o próprio homem. Deste modo o próprio fato de que todo pensamento é um signo, se tomado em conjunção com o fato de que a vida é um trem de pensamento, prova que o homem é um signo[14] (PEIRCE, CP 5.314, tradução nossa).

A essência de algo não deve ser mais que a essência de uma representação dessa coisa, e a essência de uma representação de uma coisa é apenas a essência de uma segunda representação da representação dessa coisa etc.

Desse modo, não se pode fornecer a referência final e muito menos o sentido definitivo de um signo. Portanto, a semiose se estende em ambas as direções, em relação ao objeto, onde não há um referente definitivo, bem como ao interpretante, no qual não existe uma interpretação definitiva, e o próprio interpretante se torna apenas uma tradução ou desenvolvimento do signo original. Por isso, Peirce distingue os dois objetos do signo, ou seja, "[...] o objeto imediato ou o objeto como o signo o representa e o objeto dinâmico que é eficiente, mas não imediatamente

[12]"A corrente de pensamento introduzida e defendida por Aristóteles, segundo a qual a pesquisa científica deve penetrar até a essência das coisas para poder explicá-las." (POPPER apud ABBAGNANO, 2007, p.363).
[13]"[...] doutrina segundo a qual a linguagem das ciências contém apenas variáveis individuais, cujos valores são objetos concretos, e não classes, propriedades e similares".(ABBAGNANO, 2007, p.715).
[14] Man makes the word, and the word means nothing which the man has not made it mean, and that only to some man. But since man can think only by means of words or other external symbols, these might turn round and say: "You mean nothing which we have not taught you, and then only so far as you address some word as the interpretant of your thought". [...] the word or sign which man uses is the man himself. For, as the fact that every thought is a sign, taken in conjunction with the fact that life is a train of thought, proves that man is a sign; so, that every thought is an external sign, proves that man is an external sign.

presente[15]" (CP 8. 343, tradução nossa). Esta distinção também deve ser observada na relação entre interpretante imediato[16] e interpretante dinâmico[17].

A tríade fundamental na semiótica de Peirce é *objeto-signo-interpretante*[18] (CP 8.361, tradução nossa). A relação de um signo com seu objeto decompõe o signo em três categorias principais:

> Existem três tipos de sinais que são indispensáveis em todo raciocínio; o primeiro é o sinal diagramático, ou ícone, que exibe uma semelhança ou analogia com o tema do discurso; o segundo é o índice, que, como um pronome demonstrativo ou relativo, força a atenção para o objeto particular intencionado, sem descrevê-lo; o terceiro [ou símbolo] é o nome geral ou descrição que significa seu objeto por meio de uma associação de ideias ou conexão habitual entre o nome e o personagem significado.[19] (PEIRCE, CP 1.369, tradução nossa).

Para exemplificar Corrêa (2008, p.98) explica que uma estátua poder ser vista como um *Ícone*, ao se observar a semelhança com o indivíduo representado, ao passo que a febre é um *Índice*, quando indica a existência de uma infecção e por fim a palavra *dog* é um símbolo, que será interpretado como resultado de uma prática cultural, significativa apenas para as pessoas que possui o hábito de falar inglês.

Essa tríade indica um processo inerentemente dinâmico do signo, que não é controlado por um agente humano independente e de acordo com seus desejos. Por exemplo, o processo de comunicação não é constituído pelo encontro de atores independentes, que decidem dizer o que vem à sua mente. Em vez disso, a comunicação é um sistema social, um sistema que não interage diretamente com as mentes ou as consciências das pessoas e que não é arbitrariamente construído pelos participantes. Os agentes humanos são subsistemas, ou melhor, eles devem se constituir como esses subsistemas do sistema social de comunicação. Para descrever essa situação Peirce usa a frase: "O homem é um signo[20]" (CP 5.314, tradução nossa).

---

[15] [...] the immediate object, or the object as the sign represents it, from the dynamical object or really efficient but not immediately present object.

[16] "O interpretante imediato consiste naquilo que o signo está apto a produzir numa mente interpretadora qualquer. Não se trata daquilo que o signo efetivamente produz na minha ou na sua mente, mas daquilo que, dependendo de sua natureza, ele pode produzir." (SANTAELLA, 2007, p.13).

[17] "[...] o interpretante dinâmico, isto é, aquilo que o signo efetivamente produz na sua, na minha mente, em cada mente singular. E isso ele produzirá dependendo da sua natureza de signo e do seu potencial como signo." (SANTAELLA, 2007, p.13).

[18] Triadic relation of Sign-Object-Interpretant.

[19] There are three kinds of signs which are indispensable in all reasoning; the first is the diagrammatic sign, or icon, which exhibits a similarity or analogy to the subject of discourse; the second is the index, which like a pronoun demonstrative or relative, forces the attention to the particular object intended without describing it; the third [or symbol] is the general name or description which signifies its object by means of an association of ideas or habitual connection between the name and the character signified.

[20] [...] man is an external sign.

ISSN: 2526-2149

O pré-requisito mais importante para aprendizagem e conhecimento, é a possibilidade de enfrentar simultaneamente um conjunto de conhecimentos, bem como seu desenvolvimento ou aplicação. Essa possibilidade é fornecida apenas pela cooperação social. Conceitos e ferramentas da atividade humana servem como substitutos da cooperação direta. Com eles, as pessoas são criativas, detectando novos significados dentro do sistema estabelecido de conceitos e ferramentas e agindo de acordo com esses novos significados.

Em *Novos ensaios sobre o entendimento humano*, Leibniz, discutindo com Locke, exemplificou:

> Alguém em situação de perigo precisa de uma munição para uma pistola, mas não tem chumbo para derreter e construir; e um amigo lhe diz: 'Lembre-se que o dinheiro que você tem em sua bolsa é fusível'. Este amigo não lhe ensinará uma boa qualidade do dinheiro, mas fará com que ele pense sobre o uso que poderá fazer, para ter a munição nessa necessidade urgente.[21] (LEIBNIZ, 1993, tradução nossa).

Pode-se interpretar um martelo como uma toalha de mesa, mas qual será o resultado? Por outro lado, pode-se utilizar um martelo como um pêndulo ou como um peso em uma balança, dependendo do problema em questão.

Uma abordagem semiótica, verdadeiramente fértil, não se refere a uma abordagem meramente convencional, mas em análises detalhadas e cuidadosas. Mesmo que se admita que, de certo modo, tudo pode ser semelhante a quase tudo, isso vai depender do contexto. A objetividade do nosso conhecimento é mostrada nas suas aplicações.

6 O RACIOCÍNIO DIAGRAMÁTICO

O filósofo e matemático Immanuel Kant (1724 - 1804) enfatizou que o princípio da consistência só se aplica se houver um objeto dado. A afirmação de que "[...] um triângulo tem três ângulos [...] não enuncia que os três ângulos necessários existam, mas sob a condição de que existe um triângulo, três ângulos devem necessariamente existir nele[22]" (1998, A 593/ B 621 – A 594/ B 622, tradução nossa).

Conceitos matemáticos são esquemas de operação e se tornaram funções da atividade cognitiva, em vez de serem o resultado da abstração. Um exemplo clássico e muito discutido

---

[21] Quelqu'un a besoin dans le danger d'une balle de pistolet et manqué de plomb pour en fondre dans la forme qu'il a; un ami luy dit: souvenés vous que l'argent que vous avez dans votre bourse, est fusible; cet ami ne luy apprendra point une qualité de l'argent mais il fera penser à une usage qu'il en peut faire pour avoir des balles a pistolet dans ce pressant besoin.

[22] [...] a triangle has three angles [...] does not say that three angles are absolutely necessary, but rather that under the condition that a triangle exists (is given), three angles also exist (in it) necessarily.

consiste na crítica de George Berkeley (1685 - 1753) às ideias sobre o *triângulo geral* formulada por John Locke (1632-1704). Locke afirmava que:

> [...] não são tão óbvias ou fáceis [...] como as particulares [...]. Por exemplo, não é necessário fazer muito esforço e ter muita habilidade para formar a ideia geral de um triângulo [...] pois não deve ser nem acutângulo nem retângulo, equilátero, isósceles ou escaleno; mas todos e nenhum destes de uma só vez.[23] (1690, IV 9. 7, tradução nossa).

Contrapondo-se, Berkeley perguntava aos leitores do *Ensaio acerca do entendimento humano* de Locke para tentar descobrir se eles poderiam ter "[...] uma ideia ao que deveria corresponder com essa descrição dada aqui [...].[24]" (BERKELEY, 1910, Int. 13, tradução nossa). Berkeley propôs uma solução *representacional* a esse dilema lógico, dizendo que:

> [...] uma ideia particular, quando considerada em si mesma, se toma geral quando representa todas as ideias particulares da mesma espécie. [...] Universalidade, tanto quanto compreendo, não consiste na absoluta, positiva natureza ou concepção de alguma coisa, mas na relação que significa entre particulares; por isso coisas, nomes e noções, de natureza particulares, tornam-se universais. [...] Como podemos saber se uma proposição é válida para todos os triângulos particulares sem verificar a proposição para a ideia abstrata de um triângulo?[25] [...] (1910, Int. 12-16, tradução nossa).

E Berkeley continua, é aqui que entra o novo formalismo:

> [...] A isto respondo: Embora a minha ideia ao fazer a demonstração seja a de uns isósceles retângulo, com determinada extensão de lados, eu posso generalizá-la a outros triângulos retilíneos quaisquer porque nem o ângulo reto nem a igualdade ou o comprimento dos lados entram na demonstração. É verdade que o meu diagrama inclui esses particulares, mas não se aludem na prova da proposição[26]. (1910, Int.16, tradução nossa).

Qualquer prova desse tipo é baseada em alguma interdependência mútua de texto e diagrama. O diagrama fornece, como já foi dito no início, um contexto que ajuda fixar referências e indicar os significados de certos termos. O texto faz lembrar de tomar grandezas determinadas do diagrama como variáveis, exatamente como Berkeley indicava. E mais, o

---

[23] […] are not so obvious […]as particular ones […] For example, does it not require some pains and skill to form the general idea of a triangle […]for it must be neither oblique, nor rectangle, neither equilateral, equicrural, nor scalenon; but all and none of these at once.

[24] […] an idea that shall correspond with the description here given[…].

[25] […] we shall acknowledge that an idea, which considered in itself is particular, becomes general, by being made to represent or stand for all other particular ideas of the same sort. […] Universality, so far as I can comprehend, is not consisting in the absolute positive nature or conception of anything, but in the relation it bears to the particulars signified or represented by it […] how we can know any Proposition to be true of all particular Triangles, except we have first seen it demonstrated of the abstract Idea of a Triangle which equally agrees to all?[…].

[26] To which I answer that though the idea I have in view whilst I make the demonstration, be for instance that of an isosceles rectangular triangle whose sides are of a determinate length, I may nevertheless be certain it extends to all other rectangular triangles of what sort or bigness so-ever. And that because neither the right angle, nor the equality nor determinate length of the sides are at all concerned in the demonstration. It is true, the diagram I have in view includes all these particulars, but then there is not the least mention made of them in the proof of the proposition.

texto, operando em termos de palavras gerais e com base em concepções, indica possibilidades de generalizar determinada prova, enquanto o diagrama é muitas vezes percebido em suas características definidas e, em grande parte, acidentais, quase como um objeto específico.

Por exemplo, voltando mais uma vez ao teorema 35 do Livro I dos *Os Elementos* de Euclides (2009), no diagrama apresentado, parece que a afirmação correta seria de que os paralelogramos *ADBC* e *EFBC* são congruentes, no sentido de terem a mesma área, o que não é a intenção na afirmação do teorema ao dizer que: *ABCD é igual ao paralelogramo EBCF*.

Na geometria existem dois métodos para introduzir a generalidade: por meio do *princípio da continuidade,* ponto de vista sintético, ou por meio das *coordenadas algébricas*, ponto de vista analítico (OTTE, 1997). No início do século XIX, Jean Victor Poncelet (1788-1867), Joseph Diez Gergonne (1771-1859) entre outros, entraram numa grande disputa sobre as vantagens de cada uma dessas perspectivas. Com o passar do tempo, o contexto analítico se impôs sobre o sintético, porque os matemáticos começaram a se interessar pelos espaços de dimensão maior que três.

Uma análise detalhada da interdependência mútua do texto e do diagrama é dada, ao longo de uma prova convencional do *teorema de Euler*, ao se afirmar que os pontos de concorrência dos bissetores perpendiculares, das medianas e das altitudes de qualquer triângulo são colineares. A reta determinada por eles é chamada a *reta de Euler* de um triângulo (OTTE, 2006).

Foi mostrado (Ibid.) como, comparando o que é dito no texto e o que pode ser visto a partir do diagrama, essa prova pode ser generalizada por etapas, de modo que finalmente se chegue a uma configuração desargueniana. A existência da *reta de Euler* é agora garantida pelo recíproco do *teorema de Desargues*, que afirma que, se as intersecções dos lados correspondentes de dois triângulos diferentes *ABC* e *A'B'C'* (ou prolongamentos) estão na mesma linha, então as retas por meio dos vértices correspondentes passam pelo mesmo ponto. Assim o *teorema de Euler* pertence, então, ao contexto da geometria projetiva, e não da geometria euclidiana, como se acreditava até então.

Um triângulo geral é *geral* apenas em relação a um determinado propósito ou função e dentro de um determinado contexto. Se a tarefa, por exemplo, é de provar o teorema de que as medianas de um triângulo se cruzam em um só ponto, o triângulo no qual a prova vai se basear pode ser assumido como um triângulo equilátero, sem perda de generalidade, porque o teorema no caso é um teorema da geometria afim e qualquer triângulo é equivalente a um triângulo equilátero sob transformações afins, onde equivalência ou generalidade devem ser consideradas a luz de uma teoria.

Na teoria axiomática, dois objetos são considerados iguais se forem funcionalmente equivalentes sob determinada maneira especificada pela teoria. Para estabelecer uma relação de igualdade neste contexto, deve-se destacar as funções e os predicados que compõem os axiomas de substituição e que distinguem a igualdade de outras relações de equivalência, em que tudo depende da teoria mais adequada a ser aplicada em cada tipo de problema.

Considere ainda o seguinte exemplo: a catenária e a parábola são quase indistinguíveis, especialmente nas proximidades do vértice, e Galileu Galilei (1564 - 1642) acreditava que, de fato, eram iguais. Apenas cerca de cem anos depois, o físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) descobriram que a descrição da catenária é dada por uma função hiperbólica, enquanto a parábola, por uma função de segundo grau (OTTE, 2015).

Pode-se pensar que é muito relativa, a escolha preferida, seja a geométrica ou a algébrica, pois sobre a ótica da topologia, ambas as curvas são as mesmas, no entanto, em uma interpretação física e prática, pode ser razoável assumir uma perspectiva dinâmica. Analisando uma corrente pendurada, ou seja, a catenária em uma ponte suspensa, e supondo que os cabos de suspensão formem uma parábola, percebe-se que a distribuição de forças nos dois casos é muito diferente. Então, do ponto de vista dinâmico, a catenária e a parábola devem ser consideradas como curvas diferentes.

O platonismo de Frege leva em consideração a indescritibilidade de objetos ideais no sentido do platonismo comum, porque ele conecta a definição de números com a aplicação deles. Frege disse:

> [...] que a indicação numérica contém um enunciado sobre um conceito. Isto fica talvez mais evidente no caso do número 0. Se digo: “Vênus tem 0 luas”, não há absolutamente nenhuma lua ou agregado de luas que se pudesse enunciar; mas ao conceito “lua de Vênus” atribui-se deste modo uma qualidade, a saber, a de não assumir nada. Se digo que “a carruagem do imperador é puxada por quatro cavalos”, atribuo o número quatro ao conceito “cavalo que puxa a carruagem do imperador[27]”. (1884, parágrafo 46, tradução nossa).

Frege evita o essencialismo do platonismo clássico e parece procurar se esquivar do seu dilema, ou seja, sua incapacidade de responder à pergunta: *Como se pode conhecer o mundo de*

[27] […] dass die Zahlangabe eine Ausssag von einm Begriffe enthalte. Am deutlichsten ist dies vielleicht bei der Zahl 0. Wenn ich sage: “die Venus hat 0 Monde “, so ist gar kein Mond oder Aggregat von Monden da, von dem etwas ausgesagt werdwn Könnte; aber dem Begriffe “ Venusmond“ wird dadurch eine Eigenschaft beigelegt, nämlich die, nichts unter sich zu befassen. Wenn ich sage: “der Wagen des Kaisers wird von vier Pferden gezogen”, so lege ich die Zahl vier dem Begriffe “Pferd, das den Wagen des Kaisers zieht” bei.

objetos ideais ou abstratos? No entanto, Frege não oferece solução adequada para a epistemologia matemática. O problema resulta novamente da concepção da lógica de Frege como uma linguagem universal e a visão resultante da aplicação como descrição conceitual. Frege consequentemente considerou a *existência* como um predicado de segunda ordem, ou seja, um predicado de predicados. McGinn ilustra essa visão da existência da seguinte maneira:

> [...] Quando você pensa que tigres existem, você não pensa em certos objetos felinos e que cada um tem a propriedade da existência. Ao invés disso, você pensa na propriedade da tigresa, que tem instâncias. [...] O conceito de um objeto existente simplesmente é o conceito de uma propriedade que possui instâncias.[28] (2000, p.18, tradução nossa).

Se a existência pura e simples é descartada, a matemática, como atividade que enfrenta o ainda desconhecido e o não categorizado, torna-se inconcebível. A concepção fregiana relativa a existência da universalidade da lógica é uma consequência do papel dos índices, signos, ou seja, do caráter contextual.

Heijenoort foi pioneiro a assinalar claramente as peculiaridades semânticas em relação à concepção da lógica de Frege como linguagem universal:

> A universalidade da lógica se expressa como uma característica importante do sistema de Frege. Nesse sistema, os quantificadores relacionados às variáveis individuais variam entre todos os objetos. [...] Boole tem sua classe universal, e De Morgan denota o seu universo de discurso por '1'. Mas estas opiniões dificilmente apresentam uma importância ontológica. Podem ser alterados muitas vezes. O universo do discurso compreende apenas o que concordamos em considerar num determinado momento, num determinado contexto. Para Frege não pode ser uma questão o fato de mudar os universos. [...] O universo de Frege consiste de tudo o que há e está fixo [29] (1967, p.325, tradução nossa).

O cálculo lógico ou matemático é um tipo de raciocínio diagramático. No desenvolvimento da matemática pura, durante os séculos XIX e XX, prevaleceram dois movimentos muito diferentes. Por um lado, o movimento de rigor da aritmetização, e, por outro, o movimento axiomático, que se originou na ênfase de Poncelet ou Peirce no princípio da continuidade. A matemática ou a matemática axiomática como um raciocínio diagramático representa uma perspectiva genética visando a generalização, enquanto a matemática como

[28][...] When you think that tigers exist you do not think of certain feline objects that each has the property of existence; rather, you think, of the property of tigerhood, that it has instances. [...] The concept of an object existing simply is the concept of a property having instances.

[29] The universality of logic expresses itself in an important feature of Frege's system. In that system the quantifiers binding individual variables range over all objects. As is well known, according to Frege, the ontological furniture of the universe divides into objects and functions. Boole has his universal class, and De Morgan his universe of discourse denoted by '1'. But these have hardly any ontological import. They can be changed at will. The universe of discourse comprehends only what we agree to consider at a certain time, in a certain context. For Frege it cannot be a question of changing universes. One could not even say that he restricts himself to one universe. His universe is the universe. Not necessarily the physical universe, of course, because for Frege some objects are not physical. Frege's universe consists of all that there is, and it is fixed.

aritmética ou teoria dos conjuntos, se preocupa principalmente com o fundamento e a separação. Todo o raciocínio matemático é diagramático e "[...] todo o raciocínio necessário é o raciocínio matemático, por mais simples que seja[30]" (PEIRCE, CP. 5.148, tradução nossa).

Os diagramas são essencialmente ícones, e os ícones são particularmente adequados para tornar compreensível o possível e geral, em vez do real e existente. Diagramas, no entanto, também podem incluir índices, que são signos que indicam, denotam ou estão realmente ligadas a algo particular. Diagramas, sejam eles geométricos ou algébricos, servem para fixar as referências. Dessa forma, são estabelecidos pela complementaridade[31] de ícones e índices. Porém, ainda que a iconicidade represente o caráter dominante dos diagramas matemáticos, é a indexicalidade o que torna inevitável a abordagem semiótica, porque mostra que o raciocínio matemático é contextual e que a matemática não é uma linguagem formal e universal. Os contextos relevantes são os contextos semióticos. Peirce escreve:

> Pode-se pensar que não haveria uso de índices em matemática pura, lidando, como faz, com criações ideais, sem considerar se elas estão em qualquer lugar realizadas ou não. Mas as construções imaginárias do matemático, e até mesmo dos sonhos, são tão aproximadas da realidade que têm um certo grau de fixidez, pelo que podem ser reconhecidas e identificadas como indivíduos [32](CP, 2.305, tradução nossa).

Parece irônico que o próprio Frege não pudesse evitar índices em sua explicação da diferença entre sentido e referência em termos de diagrama geométrico. No famoso ensaio em *Sobre o Sentido e a Referência*, ele cita alguns exemplos de geometria elementar. E escreve:

> [...] Sejam *a, b, c* as linhas que conectam os vértices de um triângulo com os pontos medianos dos lados opostos. O ponto de intersecção de *a* e *b* é o mesmo que o ponto de intersecção de *b* e *c*. Portanto, temos designações diferentes para o mesmo ponto, e estes nomes ('ponto de intersecção de *a* e *b*'; 'ponto de intersecção de *b* e *c*'), da mesma forma, indicam o modo de apresentação, e consequentemente a sentença contém um conhecimento real.[33] (FREGE, 1892, parágrafo 26, tradução nossa).

Supondo que, no curso da construção, marca-se esses dois pontos, *ponto de interseção de a e b* e *ponto de interseção de b e c,* e depois verifica-se, surpreendentemente, que esses dois

[30] [...] all necessary reasoning is mathematical reasoning, no matter how simple it may be

[31] A Complementaridade, apoiada na semiótica de Pierce, afirma que para caracterizar conceitos ou ideias ligadas à educação matemática é necessário apresentá-las, não como uma mera dualidade, mas, desempenhando um ato epistemológico individual e um papel complementarmente assimétrico. Embora aparentemente contraditórias elas se complementam.

[32] One might think, that there would be no use for indices in pure mathematics, dealing, as it does, with ideal creations, without regard to whether they are anywhere realized or not. But the imaginary constructions of the mathematician, and even dreams, are so far approximate to reality as to have a certain degree of fixity, in consequence of which they can be recognized and identified as individuals.

[33] [...] Es seien a, b, c die Geraden, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Mitten der Gegenseiten verbinden. Der Schnittpunkt von a und b ist dann derselbe wie der Schnittpunkt von b und c. Wir haben also verschiedene Bezeichnungen für denselben Punkt, und diese Namen ("Schnittpunkt von a und b"; „Schnittpunkt von b und c") deten zugleich auf Art des Gegenseiten, und und daher ist in dem Satze eine wirliche Ekenntnis enthalten".

pontos coincidem. As letras *a*, *b*, *c* são meros índices, denominação dos pontos, e seu significado é restrito ao contexto de um determinado diagrama geométrico e o mesmo é verdade em relação ao *ponto de intersecção de a e b* e *ponto de interseção de b e c*. Nesta visão, interpretar-se-ia essa equação como uma relação entre dois objetos diferentes, como fez Frege, ao considerar a equação como relação entre duas designações diferentes do centro de gravidade do triângulo geral.

7 CONSIDERAÇÕES

A abordagem semiótica não admite que os objetos do universo estejam fixados e sejam imutáveis, pelo contrário, reconhece que a atividade humana pode trabalhar com objetos ainda desconhecidos na sua essência, e a matemática, bem como a prática científica, decide quais são os tipos de objetos cujas existências devam ser assumidas. Obviamente, a referência a objetos é importante, mas eles não precisam ser dados e completamente descritos com antecedência. Em outras palavras, o fato central para a aplicabilidade da matemática é a independência parcial de sentido e de referência das representações simbólicas.

Na teoria fregiana, o sentido de um termo representa o modo de apresentação de um objeto previamente descrito. Tal concepção, é completamente inadequada para a dinâmica do conhecimento matemático, como asseverado por Benacerraf. A complementaridade de sentido e referência, ou seja, a complementaridade entre um conceito e a forma como tal conceito é apresentado, é essencial no que diz respeito à evolução de todo o conhecimento. O significado dos símbolos é onipresente, mas a semiótica não é reducionista, ela floresce sobre as diferenças e essas são o motor das descobertas.

Para esse fim, deve-se ter a capacidade de fundir os dois polos do patrimônio semiótico clássico, a tradição epistemologicamente focada, que enfatiza a importância do signo indicativo e a tradição linguística fundamentada, que estuda o símbolo convencional.

Na educação matemática, faz-se necessário buscar mecanismos que transponha a dualidade entre os conceitos apresentados para que professores possam perceber e compreender o que se tem denominado por complementaridade e, assim, de fato, contribuir para uma escola participativa, crítica e responsável pelas suas escolhas.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia.** 5ªed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ANDERY, Maria Amália et al. **Para compreender a Ciência**: uma perspectiva histórica. Rio de Janeiro: Editora Garamond, 2014.

BENACERRAF, Paul. What Numbers could not be; reprinted 1985 in: Benacerraf/ Putnam (eds), **Philosophy of Mathematics**, Cambridge University Press, London, 1965.

BERKELEY, George. 1710/1957. **A treatise concerning the principles of human knowledge**. Indianapolis, IN: Bobbs-Merrill, 1710.

BOHM, David Joseph. Science as Perception Communication, in: F Suppe (Ed), **The Structure of Scientific Theories**, Urbana: University of Illinois Press, 374-423, p. 383f), 1977.

CHIHARA, Charles. **A Structural Account of Mathematics**. Oxford: Clarendon Press, 2004.

CORRÊA, Isabella Moreira de Paiva. **Como se fala matemática?** Um estudo sobre a complementaridade entre representação e comunicação na educação matemática. 2008. 154f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2008.

CORRÊA, Isabella Moreira de Paiva. **Como se fala matemática?** Um estudo sobre a complementaridade entre representação e comunicação na educação matemática. 2008. 154f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2008.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. Rio Claro: Unesp, 2009.

FEYNMAN, Richard. **The Character of Physical Law**. Cambridge: MIT Press, 1967.

FONSECA, Rogério Ferreira da. **A Complementaridade entre os Aspectos Intensional e Extensional na Conceituação de Número Real Proposta por John Horton Conway**. 2010. 182 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

FREGE, Gottlob**. Die Grundlagen der Arithmetik**, Breslau, 1884.

FREGE, Gottlob. Ñber Sinn und Bedeutung**, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik** NF 100, 25–50, 1892.

FREGE, Gottlob. Illustrative extracts from Frege’s review of Husserl’s Philosophie der Arithmetik I. In: **Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege**. Ed. by Peter Geach and Max Black. Oxford: Blackwell, p. 79-85, 1952.

HEIJENOORT, Jean Van. Logic as Calculus and Logic as Language. **Synthese**. New York: Springer, v. 17, p. 324-330. 1967.

HILBERT, David. **Mathematical Problems:** Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900. Disponível em: <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html>. Acessado em: 02 jul. 2018.

KANT, Immanuel. **Critique of Pure Reason**. Translated and edited by Paul Guyer and Allen W. Wood. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

LEIBNIZ, Gottfriend Wilhelm. **Nouveaux Essais sur l’Entendement Humain**. Paris: Editions Flamarion. 1993.

LOCKE, John. **An Essay Concerning Human Understanding**. New York: Oxford University Press, 1690 (1975).

MANNHEIM, Karl. **Ideologie und Utopie**. Frankfurt, 1929.

MARX, Karl. **Capital:** A Critique of Political Economy. Vl. 1. New York, NY: International Publishers, 1967.

MCGINN, Colin. **Logical Properties**. Oxford: Claredon Press, 2000.

NASCIMENTO, Demilson Benedito. **Hermann Günter Grassmann (1809-1877) e o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico**: A Complementaridade Entre Alguns Aspectos da Die Lineale Audehnungslehre (1844). 2013. 189 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2013.

OTTE, Michael Friedrich. Analysis and Synthesis in Mathematics from the Perspective of Charles S. Peirce`s Philosophy. In: Otte, M./M. Panza (eds.), **Analysis and Synthesis in Mathematics**: History and Philosophy. Boston Studies in the Phil. Of Science, vol. 196, Kluwer, 327-364, 1997.

OTTE, Michael Friedrich. **Proof analysis and Continuity, Foundations of Science**, vol. 11, p. 121–155, 2006.

OTTE, Michael Friedrich. **A Realidade das Ideias**: uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática. Cuiabá, MT, Editora da UFMT, 2012.

OTTE, Michael Friedrich.; BARROS, Luiz Gonzaga Xavier de. Creativity, Tacit Knowledge and Mathematics Education. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, On line - v. 3, n. 1, p. 101-111, 2015. Disponível em: <https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/46/31 >. Acessado em: 19 dez. 2018

PEIRCE, Charles Sanders.: **CP = Collected Papers of Charles Sanders Peirce**. Vol. I-VI, ed. by Charles Hartshorne and Paul Weiß, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1931-1935, Vol. VII-VIII, ed. by Arthur W. Burks, Cambridge, Mass. (Harvard UP), 1958, (quoted by no. of volume and paragraph).

SANTAELLA, Lucia. **O que é semiótica?** São Paulo: Abril Cultural, 2007.

SILVA, Fernanda Ivo da. **O pensamento relacional na geometria computadorizada**. 2009. 122f Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2009.

WIELEWSKI, Gladys Denise. **O tabuleiro de xadrez:** Uma perspectiva para a didática da Aritmética. 1998. 230f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Mato Grosso, Mato Grosso, Cuiabá, 1998.

Recebido em: 22 de dezembro de 2018.

Aprovado em: 17 de maio de 2019.