Revista Pratica Docente | ISSN: 2526-2149
Instituto Federal de Mato Grosso - Campus Confresa
Volume 9, e24011
Janeiro/Dezembro, 2024

10.23926/RPD.2024.v9.e24011.id893

Matemática e suas tecnologias

Revista Prática Docente

Métodos Históricos para determinar a equação da Orthotome à Parábola

Historical Methods to determine the equation from the Orthotome to the Parable

Métodos históricos para determinar la ecuación de la Orthotome a la Parábola

Ivonne C. Sánchez[1] **Luis Andrés Castillo**[2]

Resumo

Neste artigo se destaca o desenvolvimento histórico e epistemológico dos métodos para determinar a equação de uma cônica específica, desde Menêcmo com a Orthotome até as contribuições de Apolônio com a Parábola. O texto revela um movimento sequencial histórico, utilizando a História da Matemática para enriquecer o ensino da parábola, explorando métodos diversos para determinar sua equação, culminando na expressão reduzida, isto a partir de uma pesquisa bibliografia em fontes primarias, secundarias e terciarias. Embora não foque nas potencialidades das tecnologias digitais, destaca-se o papel do GeoGebra na realização precisa de figuras e na compreensão de correlações geométricas e algébricas durante a investigação histórica. Consideramos que este tipo de investigação histórica e de importância conceitual para os professores e de importância didática sobre o desenvolvimento, apropriação e representação histórica não apenas dessa cônica, mas também de outras curvas, no âmbito científico e disciplinar da matemática e no seu ensino.
Palavras-chave: Parábola. Equação. História da Matemática. Ensino.

Abstract

This article highlights the historical and epistemological development of methods for determining the equation of a specific conic section, ranging from Menêcmo with the Orthotome to the contributions of Apollonius with the Parabola. The text reveals a sequential historical movement, employing the History of Mathematics to enhance the teaching of the parabola, exploring diverse methods to determine its equation, culminating in the reduced expression. This is based on bibliographic research from primary, secondary, and tertiary sources. While the focus is not on the potential of digital technologies, the role of GeoGebra in creating precise figures and understanding geometric and algebraic correlations during historical investigation is emphasized. We consider this type of historical research to be conceptually important for teachers and didactically relevant for understanding the development, appropriation, and historical representation not only of this conic section but also of other curves in the scientific and disciplinary realm of mathematics and its instruction.
Keywords: Parabola. Equation. History of Mathematics. Teaching.

Resumen

Este artículo destaca el desarrollo histórico y epistemológico de los métodos para determinar la ecuación de una determinada cónica, desde Menêcmo con el Orthotome hasta las aportaciones de Apolonio con la Parábola. El texto revela un movimiento histórico secuencial, utilizando la Historia de las Matemáticas para enriquecer la enseñanza de la parábola, explorando diferentes métodos para determinar su ecuación, culminando en la expresión reducida, basada en un estudio bibliográfico de fuentes primarias, secundarias y terciarias. Aunque no se centra en el potencial de las tecnologías digitales, sí destacamos el papel de GeoGebra para dibujar figuras con precisión y comprender las correlaciones geométricas y algebraicas durante la investigación histórica. Creemos que este tipo de investigación histórica es de importancia conceptual para los profesores y de importancia didáctica para el desarrollo, apropiación y representación histórica no sólo de esta cónica, sino también de otras curvas, en el campo científico y disciplinar de las matemáticas y en su enseñanza.

Palabras Clave: Parábola. Ecuación. Historia de las Matemáticas. Enseñanza.

1 Mestre em Educação em Ciências e Matemática (UFPA). Doutoranda em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM/UFPA). E-mail: ivonne.s.1812@gmail.com

2 Mestre em Educação em Ciências e Matemática (UFPA). Doutorando em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM/UFPA). E-mail: luiscastleb@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Mato Grosso
Campus Confresa

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A parábola é a cônica mais abordada no ensino fundamental, iniciando-se a partir do nono ano até o primeiro ano do ensino médio. Essa abordagem fundamenta-se no estudo da função quadrática, explorando diversas representações, tais como gráficos, expressões algébricas e tabelas. No terceiro ano do ensino médio, essa curva é minuciosamente examinada com ênfase na geometria analítica, especialmente através da definição de lugar geométrico, na qual a parábola integra o estudo das cônicas, desvinculando-se do conceito de função (Siqueira, 2016).

Bordallo (2011) destacou que, nos livros didáticos do terceiro ano do ensino médio, as cônicas são comumente apresentadas por meio do corte entre um plano e um cone circular reto de duas folhas. Entretanto, Borges (2023) sinalizar que não se realiza a demonstração da equação reduzida de nenhuma cônica; a equação é apenas apresentada como o desdobramento da propriedade focal. Nesse cenário dos livros didáticos, Monteiro (2014) destaca o predomínio do enfoque algébrico no estudo das cônicas em detrimento de um ensino-aprendizagem de aspectos mais intuitivos, como proposto na geometria. Esta, por sua vez, é utilizada, em sua grande maioria, apenas como suporte introdutório para cada figura cônica abordada.

Nesse cenário, a Parábola emerge como uma curva resultante dessa interseção quando o plano é posicionado paralelamente à reta geratriz do cone reto de duas folhas. Nesse sentido, se mostra que o ensino das cônicas, em particular da Parábola, é privilegiado um ensino que apenas vincula os conhecimentos geométricos para ilustrar o corte de um cone por um plano, sem justificar sua relação com a definição lugar geométrico e outras propriedades e relações matemáticas (Siqueira; Silva, 2019).

Assim sendo, se deve procurar abordagens que façam refletir aos estudantes sobre estratégias e práticas criadas ao longo da história humana para explicar e compreender conteúdos matemáticos escolares, o que promoveria uma possibilidade de um ações pedagógicas para promover ensino e aprendizagem diferenciados, criativos, investigativos etc. Uma abordagem que propicie isto, e por meio do uso da História para/no Ensino da Matemática (Mendes, 2022b).

Alguns exemplos dessas abordagens são Sánchez e Castillo (2022) quando usam o GeoGebra para explorar e validar uma demonstração do teorema de Pitágoras, dinamizando a referida demonstração apresentada por Sócrates na obra *The Pythagorean Proposition*. Em Sánchez, Mendes e Castillo (2023) quando são descritas atividades históricas com GeoGebra para mobilizar conceitos de geometria 3D referentes ao objeto matemático cone, para contribuir com um novo olhar, por meio da tela do computador, para o ensino de matemática baseado nas informações históricas. Outros exemplos que adotam essas abordagens para explorar problemas ou demonstrações históricas temos Castillo e Sánchez (2024), Coêlho *et al.* (2023) e Teixeira *et al.* (2023).

Neste trabalho usaremos a História da Matemática para apoiar o Ensino da Parábola com base nas ideias e noções de Menêcmo, Apolônio e a abordagem como lugar geométrico proposta por Pierre de Fermat. De maneira tal a apresentar uma abordagem além do corte entre um plano e um cone reto de duas folhas, descrevendo os diversos métodos para determinar a equação da Parábola até chegar à expressão reduzida de dela. Portanto, na nossa abordagem são estabelecidas correlações geométricas e algébricas advindas do desenvolvimento histórico e epistemológico da Parábola na organização de um movimento sequencial histórico.

Assim sendo, o objetivo deste trabalho é caracterizar no desenvolvimento histórico e epistemológico os métodos de obtenção da equação da Parábola para subsidiar a organização de um movimento sequencial histórico relativos à trajetória matemática da Orthotome à Parábola para o ensino desta cônica.

Nas seções seguintes descrevemos as bases teóricas a respeito da história para/no ensino da matemática, os processos metodológicos da investigação histórica, a trajetória matemática da *Orthotome* à Parábola e, finalmente, as considerações finais.

2. HISTÓRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

A História da Matemática é um recurso pedagógico que tem despertado o interesse de muitos estudiosos e pesquisadores da Educação Matemática, estabelecendo-se, para alguns professores, como uma metodologia capaz de auxiliar o processo de ensino de Matemática em sala de aula. Para Mendes (2022b, p. 19), ele se refere ao uso da História da Matemática no ensino, definindo-o como "explorações educativas da história das ideias produzidas no passado e como podem ser refletidas na Matemática que ensinamos". De fato, a Matemática que conhecemos hoje é um reflexo dos esforços humanos para resolver problemas cotidianos e compreender o mundo. Desde a antiguidade, o homem fez inúmeras descobertas e invenções para solucionar os problemas que surgiam em sua vida diária - desde, talvez, a primeira descoberta de como produzir e usar o fogo, para cozinhar e aquecer-se, até a criação de automóveis e aviões como meios de transporte para chegar a lugares mais distantes.

Nesse sentido, os professores que utilizam a História da Matemática em suas salas de aula deveriam refletir com seus estudantes sobre as estratégias e práticas criadas ao longo da história humana que ainda podem ser implementadas hoje para explicar e compreender conteúdos matemáticos imersos nessas práticas. Isso promoveria a possibilidade de um novo método educativo que busca ensino e aprendizagem diferenciados, criativos e investigativos, entre outros. Mendes (2022b), em suas reflexões sobre o tema, reconhece que o estudo de textos do passado é importante para o ensino de Matemática, visto que o professor guia seus estudantes na reconstrução das ideias atualmente presentes na Matemática, constituídas nos livros didáticos a partir da riqueza do tratamento dos documentos originais.

Uma alternativa teórico-prática que possibilita o uso da história para a criação de atividades didáticas para o ensino de Matemática é a Investigação Histórica. Essa perspectiva baseia-se na história e na investigação como fontes de geração de Matemática escolar. Para

Mendes (2006), é possível adaptar essa perspectiva teórico-prática, valorizando e ajustando as informações históricas às necessidades do professor, de modo que seu uso seja mais produtivo na sala de aula. Ainda segundo Mendes, o princípio que articula as atividades de ensino por meio da História da Matemática é a investigação, estabelecendo em sala de aula um ambiente criativo, provocador e problematizador do conhecimento evidenciado na História da Matemática.

Seguindo essa linha de pensamento, Fossa (2006) sugere que a investigação da História da Matemática é sempre uma atividade que envolve a compreensão dos conceitos matemáticos. Nesse sentido, Fossa (2006) propõe o desenvolvimento das habilidades matemáticas que o professor e a escola desejam que o aluno alcance. Ele sugere que a História da Matemática seja incorporada ao ensino de Matemática na forma de atividades de redescoberta ou resolução de problemas, pois é uma fonte rica de problemas interessantes e desafiadores que podem ser usados em sala de aula para proporcionar um melhor entendimento dos conteúdos por parte dos alunos.

O uso de atividades mediadas pela história possibilita ao aluno perceber como os conceitos matemáticos constituídos hoje em dia mudaram ao longo do tempo e como os métodos de resolução dos problemas matemáticos históricos foram aprimorados até chegarem à forma do conhecimento escolar.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICO DA PESQUISA

Para o desenvolvimento dessa pesquisa assumimos a pesquisa bibliográfica com um caráter qualitativo. Para Gil (2008), este tipo de pesquisa é desenvolvido a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Assim sendo, optamos por uma recolha de informações que preconizassem as fontes primárias, secundarias e terciarias na procura por aspectos sobre o desenvolvimento histórico e epistemológico da Parábola.

4. UMA TRAJETÓRIA MATEMÁTICA DA ORTHOTOME À PARÁBOLA

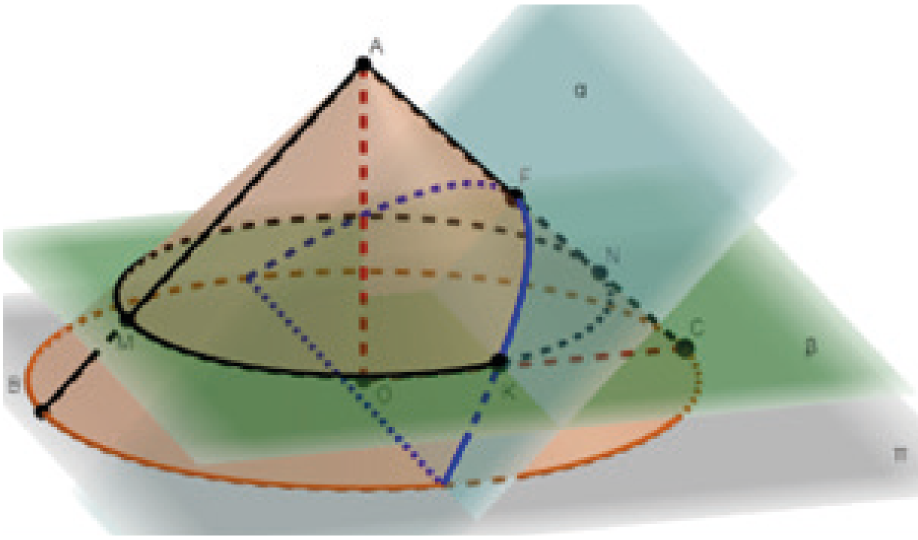
Iniciaremos este recorrido histórico-epistemológico da parábola trazendo as ideias produzidas por Menêcmo para obter o *symptome* da *Orthotome*, já que como foi dito nos parágrafos anteriores, a descoberta destas curvas atribui-se a este matemático Grego.

Nesse sentido, segundo Estrada *et al.* (2000) Menêcmo considerou um cone circular reto apoiado sobre o plano π que possui um ângulo reto no vértice A, para maiores detalhes sobre o desenvolvimento das noções de cone de Menêcmo, consultar Sánchez, Mendes e Castillo (2023).

Logo, o segmento BC é o diâmetro da circunferência c da base do cone. O ponto F está sobre a geratriz AC e por ele trace um planao α perpendicular a AC. Da interseção do cone com o plano α obtemos a curva p, que Menêcmo chamou de *Orthotome*. Além disso, o ponto O é o centro do cone. Agora temos um ponto K sobre a curva p que seja diferente de

F e por esse ponto incidiremos o plano β paralelo ao plano π. A interseção do cone com o plano β é a circunferencia g. A interseção de g com as geratrizes AC e AB são os pontos N e M, respectivamente. Temos então que o segmento MN é o diâmetro de g (Figura 1).

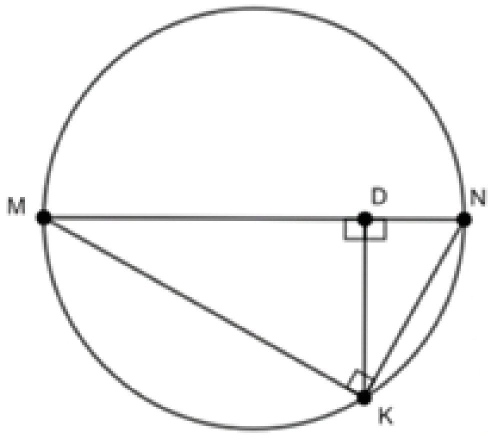
Figura 1 – A *Orthotome*



Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

A interseção entre a curva p e a circunferência c são os pontos J e G e a interseção de p com g são os pontos P e Q. Seja S o ponto medio dos pontos J e G. Por simetria os segmentos MN e PQ são perpendiculares e a interseção entre eles é o ponto D. Como MN e diametro de g, temos que o triângulo KMN inscrito na circunferencia g é rectangulo e tem o segmemto MN como hipotenusa e KD é a altura relativa à hipotenusa (Figura 2).

Figura 2 – KD é a média proporcional entre DM e DN



Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

Então, a partir da Figura 14, observe que o triângulo MKN é retângulo em K e o triângulo MKN é semelhante aos triângulos MDK e NDK. Então, os triângulos MDK e NDK são semelhantes, então podemos dizer que:

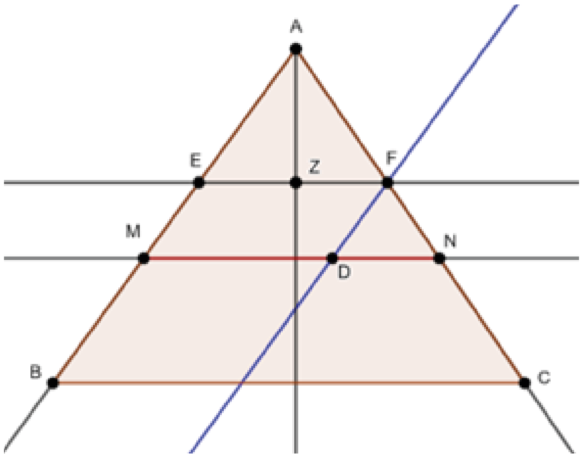
$$\frac{DM}{DK} = \frac{DK}{DN} \quad (2)$$

Desta forma, KD é a média proporcional[3] entre DM e DN, portanto, podemos escrever o seguinte:

$$KD^2 = DM.DN \text{ (2.1)}$$

Observe que FD e KD são segmentos perpendiculares e podem ser vistos como a abscissa e a ordenada do ponto K, respectivamente. Assim, a expressão matemática associada a cada curva é obtida pela relação entre KD e FD (Lopes, 2011). Como o cone é ortogonal, o triângulo retângulo que gera o cone também é isóscele, portanto, os segmentos FD e AB são paralelos (Estrada *et al.*, 2000). Em seguida, desenhe uma reta paralela a MN e chame E e Z os pontos de interseção desse paralelo com a geratriz AB e com o eixo do cone AO respectivamente (Figura 3).

Figura 3 – Vista frontal da *Orthotome* segundo Menêcmo



Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

Tanto o triângulo FZA quanto o triângulo DNF são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, os ângulos $\angle DFN$ e $\angle FZA$ são retos e os ângulos $\angle AFZ$ e $\angle FND$ são congruentes pelo fato de ser correspondentes entre paralelas, já que $MN \parallel EF$ (‖ notação para retas paralelas).

retângulos e isósceles, esses dois triângulos são semelhantes, então:

$$\frac{DN}{DF} = \frac{FA}{ZF} \Rightarrow DN = \frac{DF \cdot FA}{ZF} \text{ (2.2)}$$

Observe que $MD \parallel EF$ assim como $ME \parallel DF$, logo o quadrilátero $MDFE$ é um paralelogramo, pode-se escrever o seguinte:

$$DM = 2 \cdot ZF \text{ (2.3)}$$

Então, substituindo as equações (2.2) e (2.3), em (2), temos que,

$$KD^2 = DM \cdot DN \Rightarrow KD^2 = 2ZF\frac{DF \cdot FA}{ZF}, \text{ logo}$$

3 Um segmento é a média proporcional de dois outros segmentos, quando ocupa as duas médias ou os dois extremos da mesma proporção.

$$KD^2 = 2DF \cdot FA \quad (2.4)$$

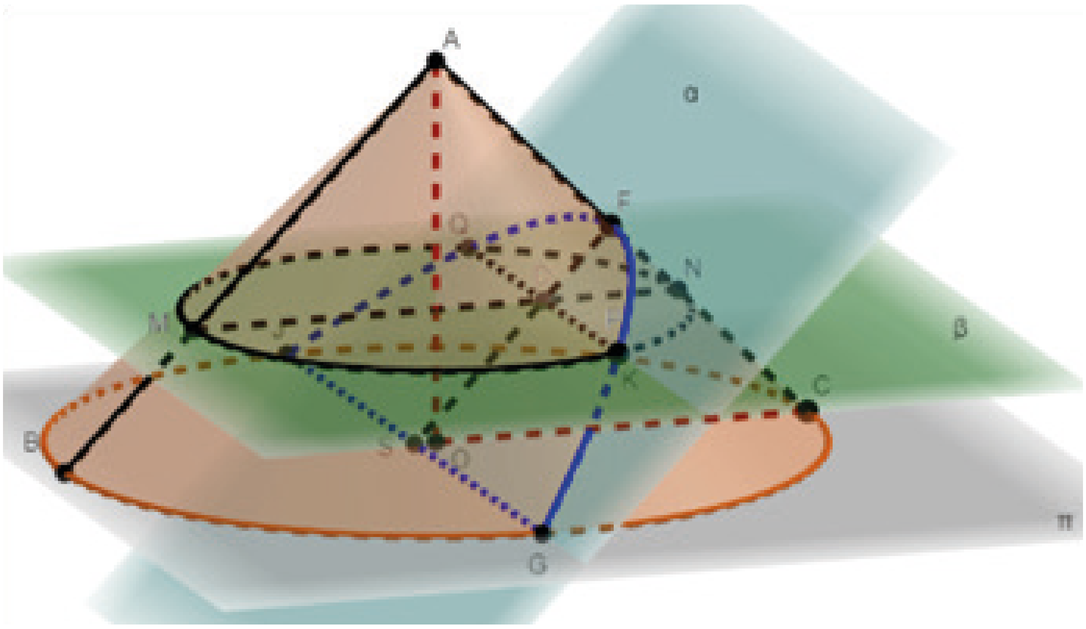
Segundo Estrada *et al.* (2000), os gregos chamavam a symptome do Orthotome da seguinte maneira: Dado um ponto qualquer K da curva, o quadrado de lado KD é o dobro do retângulo de lado $DF\,FA$, onde A é o vértice do cone, F o ponto de interseção do plano da curva com a geratriz AC (que lhe é perpendicular), e D o pé da perpendicular do ponto K.

Agora, se usamos a notação de hoje é chamarmos $KD = y$, $DF = x$ e $2FA = l$, a equação (2.4) pode ser escrita da seguinte forma:

$$y^2 = lx \quad (2.5)$$

O que seria uma equação da parábola (ver Figura 4).

Figura 4 – A *Orthotome* segundo Menêcmo



Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

O seguinte avanço no estudo da parábola foi por parte de Apolônio em seu tratado *As Cônicas*. Segundo Eecke (1963) o geômetra define a parábola no seu primeiro livro na proposição XI da seguinte maneira:

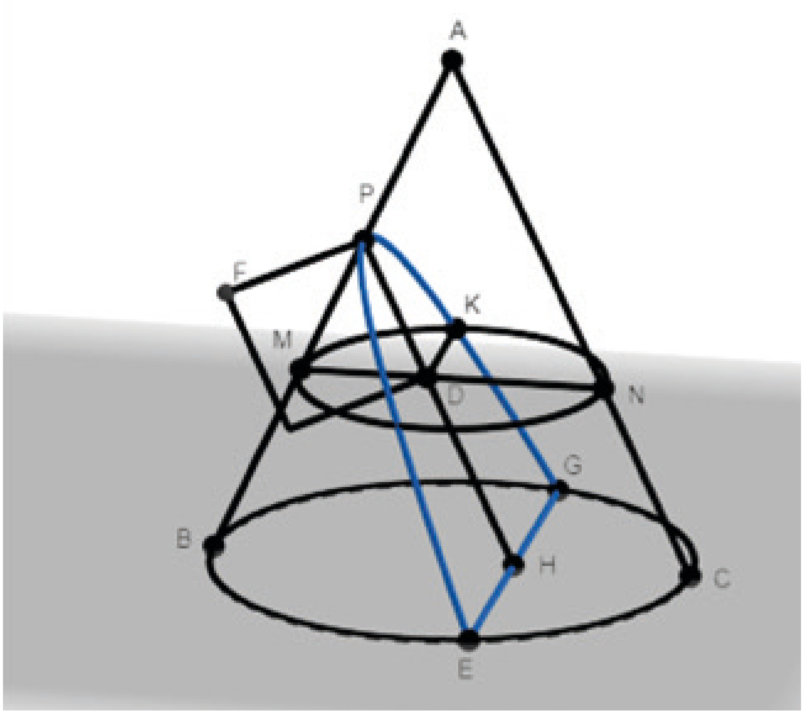
> Se um cone for cortado por um plano que passa pelo eixo, e se for cortado por outro plano que corta a base do cone ao longo de uma linha perpendicular à base do triângulo que passa pelo eixo; se, além disso, o diâmetro da seção for paralelo a um dos lados do triângulo que passa pelo eixo, o quadrado de qualquer reta traçada a partir da seção do cone, paralela à seção comum do plano secante e da base do cone, até o diâmetro da seção, equivale ao retângulo delimitado pela linha que ele corta no diâmetro, na lateral do topo da seção, e por uma determinada linha cuja relação com a linha localizada entre o ângulo do cone e do vértice da seção é igual ao do quadrado da base do triângulo que passa pelo eixo até o retângulo delimitado pelos dois lados restantes do triângulo. Chamaremos tal seção de parábola (p. 21).

Segundo Eecke (1963, p. 22) e Unbaneja (2017, p. 52) Apolônio brinda uma continuação a sua proposição XI no intuito de explicar sua definição de Parábola:

> Seja um cone de vértice A e que tem como base a circunferência BC, vamos cortá-lo por um plano que passa pelo eixo, que produzirá como seção o triângulo ABC, e por outro plano que corta a base do cone segundo a reta EG perpendicular à base BC do triângulo ABC e à superfície cônica segundo a reta GPE cujo diâmetro PH é paralelo ao lado AC do triângulo que passa pelo eixo; vamos elevar no ponto P a perpendicular PF a PH e fazer com que a reta PF esteja para uma reta PA como o quadrado de BC ao retângulo formado por AB e AC e, por fim, traçamos por qualquer ponto K do seção paralela KD a EG. Digo que o quadrado de KD equivale ao retângulo de PF e PD.

A solução de Apolônio para sua proposição XI do livro I é mostrada na Figura 5 a seguir:

Figura 5 – Solução da proposição XI de Apolônio



Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

Mais detalhadamente, o que Apolônio propõe para o estudo desta curva pode ser entendido da seguinte forma. Sea um cone de vértice A e que tem como base a circunferência BC, trazemos um plano que passa pelo eixo, que produzirá o triângulo axial ABC, logo o segmento BC é base do triângulo axial ABC. O segmento GE no plano da base do cone é perpendicular a BC. A curva FGE é uma Parábola gerada pela intercepção do plano π com o cone, logo o segmento FH é a intercepção da seção plana com o triângulo ABC. O ponto K é um ponto qualquer pertencente a curva FGE, com o segmento KD perpendicular ao plano do triângulo axial ABC. Assim, KD é perpendicular a FH no ponto D. Por sua parte, o segmento MN é o diâmetro da seção circular determinada por um plano que contêm o segmento KD, sendo este paralelo à base BC. O segmento MN intercepta o lado AB em M e AC em N, logo KD é perpendicular a MN no ponto D.

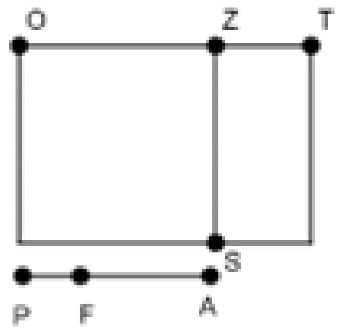
Por média proporcional encontra-se:

$$KD^2 = MD \cdot ND \quad (3.1)$$

O ponto P é a intercepção da curva com um dos lados do triângulo axial ABC. PF é um segmento perpendicular a PH é PF também está contido no plano perpendicular a seção cônica que passa por P. Segundo Lopes (2011) o segmento PF é de extrema importância para a caracterização das curvas. Ainda segundo este autor, é um parâmetro que Apolônio definiu em função dos lados do triângulo axial ABC e dos segmentos AP e PF da seguinte forma:

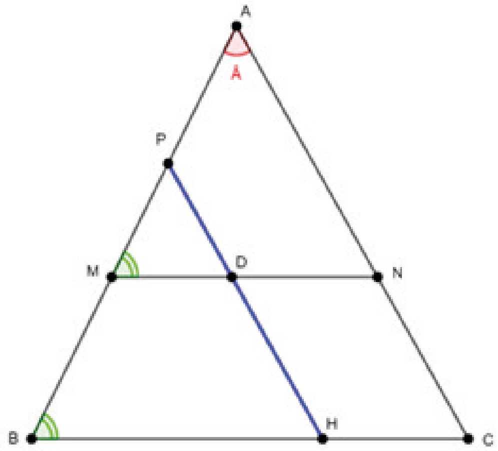
$$\frac{PF}{PA} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC} \quad (3.2)$$

O autor Eecke (1963, p. 22) em seu texto comenta como Apolônio conseguiu chegar à equação (3.2):

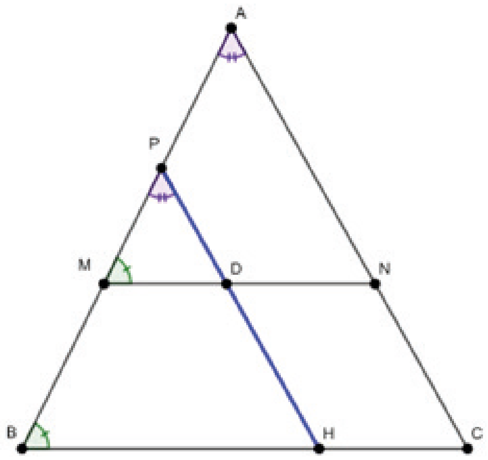
> Encontramos num pequeno comentário de Eutócio, relativo a esta proposição, (ver ed. Heiberg, vol. II, p. 217), a forma de satisfazer pelo processo de aplicação de áreas, usual entre os geômetras da antiguidade, para o relacionamento.
>
> $$\frac{PF}{PA} = \frac{BC^2}{BA \times AC}$$
>
> Apolônio aqui invoca subsidiariamente, resumimo-lo da seguinte forma, de acordo com o texto grego de Eutócio: Seja um retângulo tal que:
>
> $$OZ \times ZS = BA \times AC$$
>
> Apliquemos ao lado ZS uma área retangular equivalente ao quadrado BC, cujo outro lado será ZT:
>
> 
>
>
> $$\frac{PF}{PA} = \frac{TZ}{ZO}$$
>
> Os retângulos OS, TS estão entre eles como suas bases, feitos
>
> $$\frac{TZ}{ZO} = \frac{area\ TS}{area\ OS} = \frac{ZT \times ZS}{OZ \times ZS}$$
>
> $$\frac{PF}{PA} = \frac{TZ}{ZO} = \frac{BC^2}{BA \times AC}$$
>
> $$\frac{PF}{PA} = \frac{BC^2}{BA \times AC}$$

Agora, se PH for paralelo ao lado AC do triângulo Axial ($PH \parallel AC$) e como foi dito acima, o segmento MN é paralelo ao diâmetro da base BC ($MN \parallel BC$), então os triângulos ABC e PMD são semelhantes, pelo critério ângulo- ângulo (o ângulo $\angle ABC$ e congruente com o ângulo $\angle PMD$ por ser ângulos correspondentes entre paralelas, de igual maneira, o ângulo $\angle MPD$ e congruente com o ângulo $\angle BAC$, por ser ângulos correspondentes entre paralelas (Figura 6a). De igual maneira, os triângulos ABC e AMN são semelhantes, pelo critério ângulo-ângulo (o $\angle A$ é comum para os dois triângulos, o ângulo $\angle CBA$ e congruente com o ângulo $\angle NMA$ por ser ângulos correspondentes entre paralelas (Figura 6b).

Figura 6 – Semelhança nos triângulos



(a)



(b)

Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

então temos que:

$\Delta PDM \approx \Delta ABC$ e $\Delta ABC \approx \Delta AMN$, logo $\Delta PDM \approx AMN$

Daí tem-se que:

$$\frac{MD}{PD} = \frac{BC}{AC} \text{ e } \frac{DN}{PA} = \frac{BC}{BA} \quad (3.3)$$

Dividendo ambos os membros da equação (3.1) por tem-se que:

$$\frac{KD^2}{PD \cdot PA} = \frac{MD \cdot DN}{PD \cdot PA} \quad (3.4)$$

Logo, substituindo (3.2) e (3.3) em na equação (3.4)

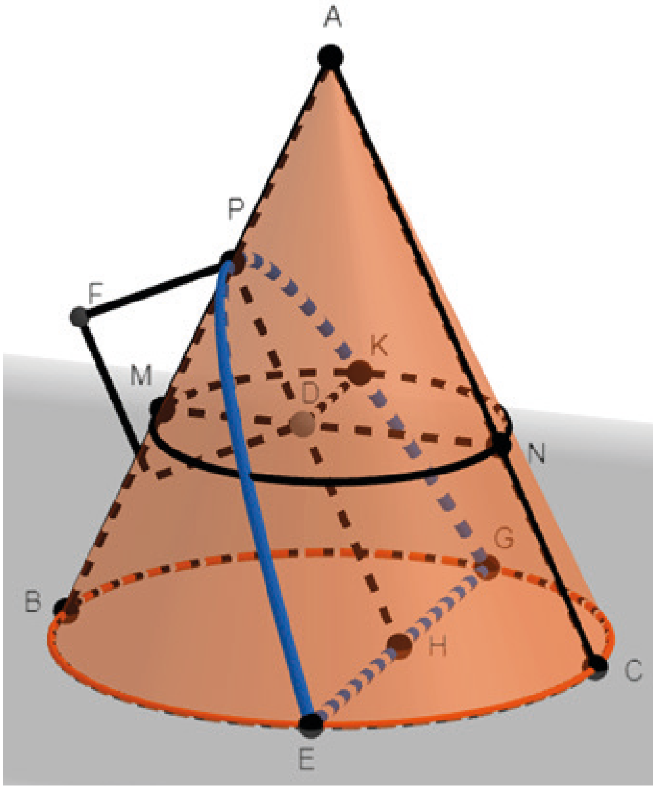
$$\frac{KD^2}{PD \cdot PA} = \frac{BC \cdot BC}{AC \cdot BA} = \frac{BC^2}{AC \cdot BA} = \frac{PF}{PA} \quad (3.5)$$

Então, podemos escrever (3.5) da seguinte maneira:

$$KD^2 = PF \cdot PD \quad (3.6)$$

A equação (3.6) pode ser interpretado geometricamente como: a área do quadrado de lado KD é igual a área do retângulo de lados PF e PD. Então a curva GPE é chamada pelo Apolônio como Parábola (Figura 7), que vem do grego *paraboli*, ou seja, aplicação sem falta ou excesso (Lopes, 2011, p. 44).

Figura 7 – Parábola GPE



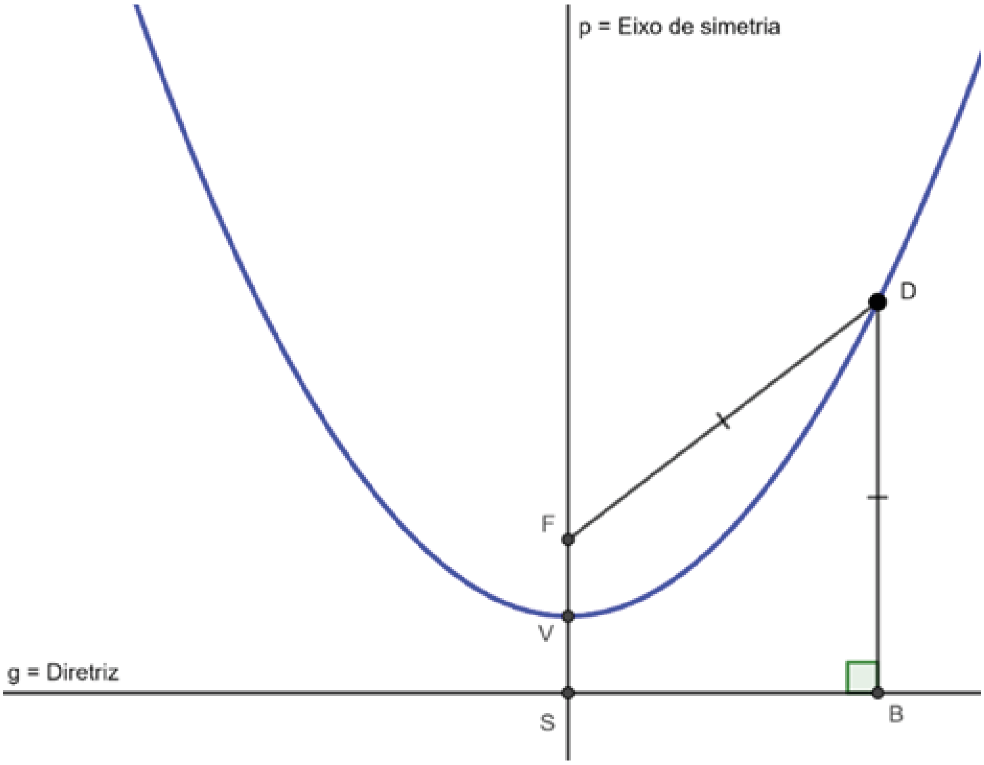
Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

Em sua obra As Cônicas, Apolônio escreveu sobre alguns elementos característicos das cônicas como, a definição de reta tangente e normal presente no primeiro livro. Já no terceiro livro o geômetra escreveu sobre uma propriedade particular das cônicas que estava relacionada com o que chamou de "os pontos originados pela aplicação". Esses pontos foram chamados de focos pôr o astrônomo e matemático Johannes Kepler (1571-1630), que os utilizou para descrever as órbitas planetárias. Assim, muitos matemáticos escreveram sobre esta propriedade das cônicas para a física, propondo aplicações práticas no campo da Óptica (Silva Filho, 2015). Porém o estudo da propriedade dos focos tornou-se muito mais relevante quando passaram a utilizá-lo na caracterização das cônicas. Além disso, as contribuições feitas por Descartes e Fermat no século XVII permitiu um câmbio no estudo destas curvas com os inícios da Geometria Analítica relacionando a Álgebra com a Geometria e caracterizando as curvas como lugares geométricos. Tudo isto é de tal importância que influencia até hoje o ensino das cônicas na escola e no nível superior.

Para seguir com o estudo da Parábola, agora vamos a considerar a seguinte definição: "uma parábola é definida como o conjunto de pontos, em um plano, que estão à mesma distância de um ponto (o foco) e de uma reta (a diretriz)" (Smith, 2013). Para caracterizar a Parábola segundo a definição anterior, utilizaremos o método proposto por Descartes em sua obra O *Discurso do Método*. No apêndice A *Geometria* o matemático francês aplica brilhantemente o método analítico para resolver problemas geométricos que permaneciam insolúveis com os métodos geométricos tradicionais. Assim, declararemos primeiramente aquilo que é evidente baseado nos dados proporcionados pela definição. Logo, identificar aqueles objetos mais simples e mais fácies de conhecer até queles que são do conhecimento mais compostos, e supondo mesmo uma ordem entre aqueles que não precedem naturalmente uns aos outros. Finalmente, fazer enumerações daquilo desconhecido.

Nesse sentido, na Figura 8, a parábola é a curva azul, a reta g é a reta diretriz, a reta p é o eixo de simetria da curva, o ponto F é o foco, o ponto V é o vértice da Parábola, ou seja, o ponto mais perto da diretriz, S é o ponto de intercepção da diretriz com o eixo de simetria e o ponto D é algum ponto que lhe pertence à Parábola.

Figura 8 – Elementos de uma parábola.



Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

Da definição anterior podemos dizer o seguinte:

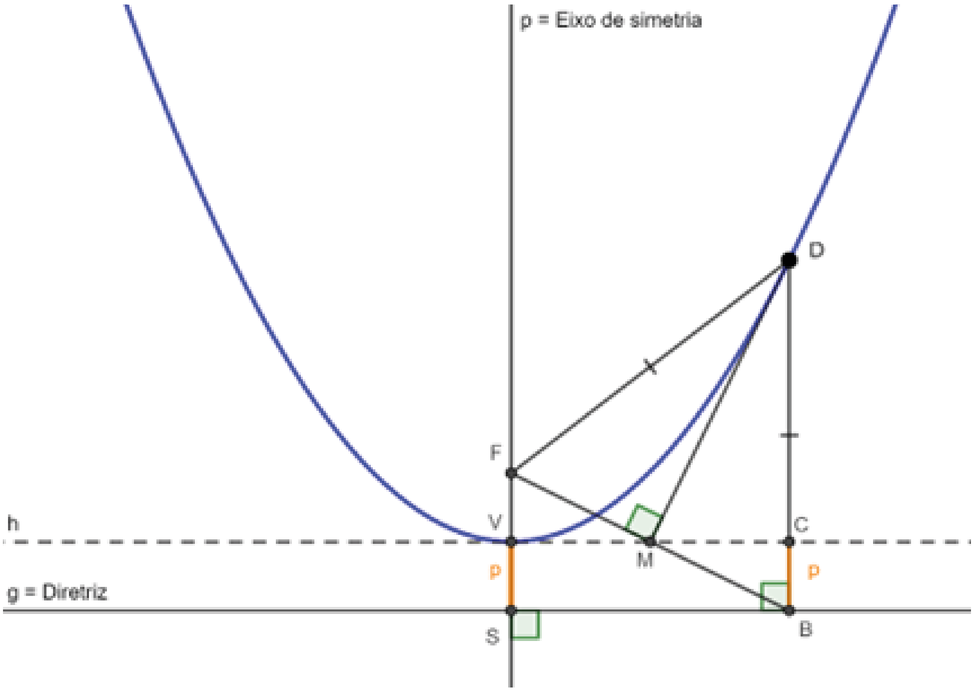
$$FD \quad = \quad BD$$

Então o triângulo ΔFDB é isóscele. Logo o ponto M é o ponto médio do segmento FB, já que DM é mediatriz[4] do segmento FB e DM é perpendicular a FB[5] ($DM \perp FB$). Além

4 A Mediatriz é uma reta perpendicular a um segmento de reta e que passa pelo ponto médio deste segmento.
5 Num triângulo isósceles, a Mediatriz, coincide com a Altura relativa à base, a Bissetriz do ângulo do vértice e a Mediana.

disso, o ponto B é a projeção ortogonal do ponto D na reta diretriz g. Sea p á distância entre o ponto V e a diretriz. A reta h é paralela à diretriz pelo ponto V. sea C o ponto de intercepção do segmento DB com a reta h. Como DB e o eixo de simetria da parábola (p) são perpendiculares à diretriz (g) e VC é paralelo à diretriz (g) (Figura 9), então:

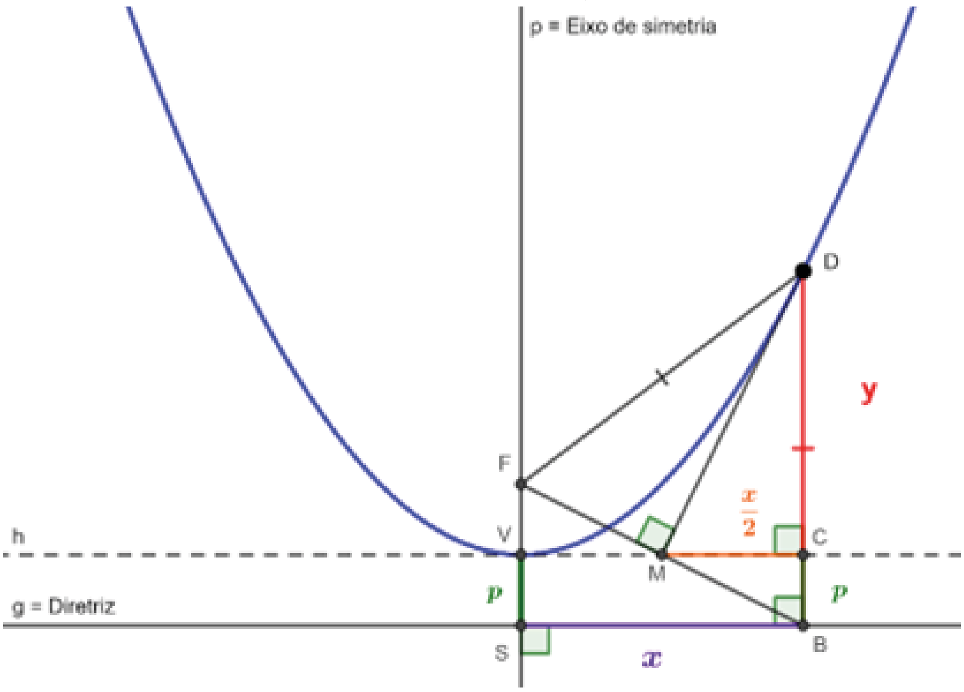
Figura 9 – Demonstração de que $DB \perp VC$



Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

Então para caracterizar a parábola queremos saber a relação entre as distâncias SB e DC. Assim, chamaremos $SB = x$, $DC = y$, $CB = p$ e $MC = x/2$ (ver Figura 10)

Figura 10 – Determinar $x/2$, y e p



Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

Agora focamos nossa atenção no que acontece no ΔDMB, ele é um triângulo retângulo com o ângulo reto no vértice M, ou seja, $\angle DMB = 90°$. Ao mesmo tempo, o triângulo ΔMCB também é retângulo, com o ângulo reto no vértice C ($\angle C = 90°$). Logo, Segundo (Smith, 2013) para determinar a raiz quadrada por meio de construções geométricas temos que os triângulos ΔBMC e ΔCMD são semelhantes já que MC é altura relativa à hipotenusa BD no triângulo ΔBMD, então temos que:

$$\frac{MC}{CD} = \frac{BC}{MC}, \text{ logo}$$
$$MC^2 = BC \cdot CD \; (*)$$

Logo, substituindo os valores de MC, BC e CD em (*), tem-se que:

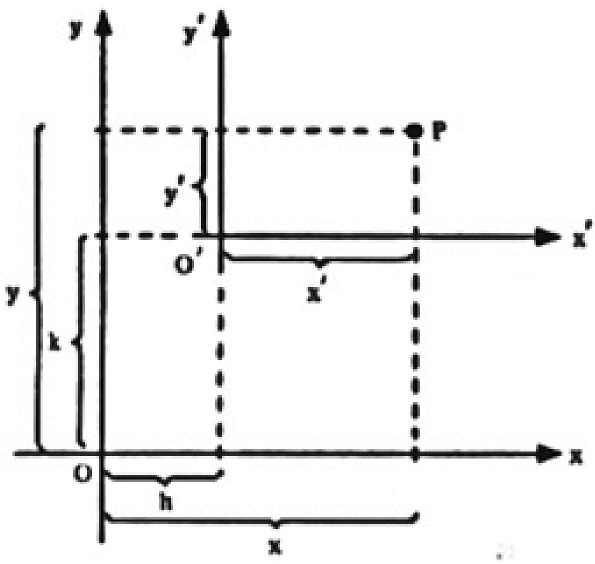
$$MC^2 = BC \cdot CD = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = py \; (**)$$

(**) pode ser transformada na fórmula usual da parábola

$$x^2 = 4py$$

A esta equação é chamada equação reduzida da parábola e constitui a forma padrão da equação de vértice na origem do sistema tendo como eixo o eixo y, é dizer, xOy. Agora, consideremos que queremos determinar a equação para outros eixos que não fossem y. Para isso, consideremos no plano cartesiano xOy um ponto $O' = h,\ k$ qualquer. Vamos introduzir um novo sistema $x'O'y'$, de maneira tal, que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida os eixos Ox e Oy e sejam paralelos a estes (Figura 11).

Figura 11 – xOy e $x'O'y'$



Fonte: Steinbruch e Winterle (1987)

Consideremos o P qualquer, tal que suas coordenadas sejam $(x,\ y)$ no sistema xOy e $(x',\ y')$no sistema $x'O'y'$, pela figura 11, podemos considerar que as coordenadas podem estar uma em função da outra, ou seja, estabelecer a relação entre os referidos sistemas, isto é, $x = x' + h$ e $y = y' + k$ ou $x' = x - h$ e $y' = y - k$. Estas expressões segundo Steinbruch e Winterle (1987) são chamadas de fórmulas de translação, as quais permitem transformar coordenadas de um sistema para outro

Tendo o exemplo de uma parábola $x'^2 = 4py'$, que se encontre no sistema $x'O'y'$, portanto, sabemos que $x' = x - h$ e $y' = y - k$, substituindo x' e y' a expressão anterior temos: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. Logo, $x^2 - 2xh + h^2 = 4py - 4pk$. Dividindo ambos os membros entre $4p$ temos:

$$\frac{x^2}{4p} - \frac{xh}{2p} + \frac{h^2}{4p} = y - k \to y = \frac{x^2}{4p} - \frac{xh}{2p} + \frac{h^2}{4p} + k$$

Depois agrupando constantes:

$$y = \frac{1}{4p}x^2 + \left(-\frac{h}{2p}\right)x + \left(\frac{h^2}{4p} + k\right)$$

Assim sendo, $a = \frac{1}{4p}$, $b = -\frac{h}{2p}$ e $c = \frac{h^2}{4p} + k$, portanto, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, e assim obtemos a equação da família de parábolas no sistema cartesiano e que observamos nos livros didáticos na atualidade.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após uma leitura e reflexão geral acerca do tema, ao longo das seções deste artigo, foi possível reconhecermos o desenvolvimento histórico e epistemológico nos métodos de determinar a equação da referida cônica desde Menêcmo com a *Orthotome*, das contribuições do Apolônio com a *paraboli* até chegar na expressão que corresponde ao lugar geométrico dos pontos que pertencem a esta curva em particular.

Nesse cenário, conseguimos materializar um movimento sequencial histórico, no qual usamos a História da Matemática para apoiar o Ensino da Parábola de maneira tal a apresentar uma abordagem além do corte entre um plano e um cone reto de duas folhas, descrevendo os diversos métodos para determinar a equação da Parábola até chegar à expressão reduzida de dela, estabelecendo formas de pensar e agir tanto geométrica como algebricamente ao longo do sequencial.

Embora, não seja foco desse trabalho salientar as potencialidades de tecnologias digitais, como o GeoGebra. Queremos destacar, o papel deste software na realização das figuras de maneira precisa e que no meio da investigação histórica este teve um papel importante na compressão de algumas correlações geométricas e algébricas nos métodos para determinar as equações da Parábola descrito nos sequencial histórico.

Finalmente, consideramos que este trabalho representa um aspecto importante para novos estudos investigativos sobre o desenvolvimento, apropriação e representação histórica desta cônica e de outras curvas no campo da matemática em seu caráter científico e disciplinar

6. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas do Pará (FAPESPA) e da Universidade Federal do Pará.

7. REFERÊNCIAS

BORDALLO, Mirella. **As Cônicas na matemática escolar brasileira**: história, presente e futuro. 2011. 71f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) –Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2011

BORGES, Thays de Souza. **Geometria analítica nos livros didáticos**: uma análise do modelo epistemológicos dominante para o ensino de cônicas no ensino médio. 2023. 117f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2023.

CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne C. A Proposição XXXIV do Livro I dos Elementos de Oliver Byrne no GeoGebra. **PARADIGMA**, v. 45, n. 1, e2024016, 2024. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024016.id1529.

COÊLHO, Iara Martins; TEIXEIRA, Lucas Santos; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne C. História da matemática e geometria dinâmica: um novo olhar ao teorema de Viviani para o ensino médio. **Journal of Education Science and Health**, v. 3, n. 1, p. 01-12, 2023. https://doi.org/10.52832/jesh.v3i1.178

FOSSA, Jhon A. Recursos pedagógicos para o ensino da matemática a partir das obras de dois matemáticos da Antigüidade. *In*: Mendes, Iran Abreu; FOSSA, John; NÁPOLES VALDÉS, Juan E. (org.). **A História como um Agente de Cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006. p. 79–136.

EECKE, Paul Ver. **Les coniques d'apollonius de perge**. 1963. 724 p.

ESTRADA, Maria; SÁ, Carlos; QUEIRÓ, João; SILVA, Maria do Céu; COSTA, Maria. **História da Matemática**. Universidade Aberta, 2000, 611p

LIMA, Elon. **Geometria analítica e álgebra linear**. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

MENDES, Iran Abreu. A investigação Histórica como Agente de Cognição Matemática na sala de aula. *In*: Mendes, Iran Abreu; FOSSA, John; NÁPOLES VALDÉS, Juan E. (org.). **A História como um Agente de Cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006. p. 79–136.

LOPES, Juracélio Ferreira. **Cônicas e aplicações**. 2011. 184f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Universitária) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011.

MENDES, Iran Abreu. **Usos da história no ensino de matemática: reflexões e experiências**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2022, 316 p.

MONTEIRO, Rubens Marinho**. Resgate do Teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o GeoGebra**. 2014. 57f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, Vitória, 2014.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés. Uma antiga demonstração do teorema de Pitágoras desde a perspectiva da geometria dinâmica. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 9, n. 26, p. 214–226, 2022. https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8030.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; MENDES, Iran Abreu; CASTILLO, Luis Andrés. Atividades históricas com GeoGebra para explorar a representação geométrica do cone. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, Brasil, v. 11, n. 1, p. e23117, 2023. https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16866.

SIQUEIRA, Carlos Alberto Fernandes de. **Um estudo didático das cônicas: quadros, registros e pontos de vista**. 2016. 167f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SIQUEIRA, Carlos Alberto Fernandes de; SILVA, Maria José Ferreira da. Um estudo da parábola: quadros, registros de representação semiótica e pontos de vista. **REVEMAT**, Santa Catarina, V. 14, n. 2, p. 1-18, 2019

SILVA FILHO, Luiz Efigênio da. **Cônicas**: apreciando uma obra-prima da matemática. 2015. 141f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

SMITH, James. **Las Bellezas Geométricas atrás de las Fórmulas Feas**, 2013. Disponivel em: www.aprendematematicas.org.mx

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**, 1. ed. Makron Books, 1987.

TEIXEIRA, Lucas Santos; COÊLHO, Iara Martins; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne C. Uma exploração do Teorema de Stewart com GeoGebra: do estático ao dinâmico. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 9, n. 2, e2002, 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6467.

URBANEJA, Pedro Miguel. **El domínio de las secciones cónicas Apolônio**. RBA: Espanha, 2017.

Informações do artigo

Recebido: 18 de dezembro de 2023.
Aceito: 16 de fevereiro de 2024.
Publicado: 25 de março de 2024.

Como citar esse artigo (ABNT)

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés. Métodos Históricos para determinar a equação da *Orthotome* à Parábola. **Revista Prática Docente**, Confresa/MT, v. 9, e24011, 2024. https://doi.org/10.23926/RPD.2024.v9.e24011.id893

Como citar esse artigo (APA)

SÁNCHEZ, I. C., & CASTILLO, L. A. (2024). Métodos Históricos para determinar a equação da *Orthotome* à Parábola. *Revista Prática Docente*, *9*, e24011. https://doi.org/10.23926/RPD.2024.v9.e24011.id893.

Editor da Seção

Walber Christiano Lima da Costa

Editor Chefe

Thiago Beirigo Lopes